

## 第一章 复变与复变函数

### (一)

1.解:  $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \arctan(-\sqrt{3}) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

2.解: 因为  $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi}{4}i}$ ,  $z_2 = \sqrt{3}-i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$$\text{所以 } z_1 \cdot z_2 = 2e^{\frac{\pi}{12}i}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

3.解: 由  $z^4 + a^4 = 0$  得  $z^4 = -a^4$

则二项方程的根为

$$\begin{aligned} w_k &= (\sqrt[4]{-1})_k \cdot a \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\ &= e^{i\frac{2k\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot a \quad (k = 0, 1, 2, 3) \end{aligned}$$

因此  $w_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)$ ,  $w_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i)$

$$w_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}(-1-i), w_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}(1-i)$$

4.证明: 因为  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

两式相加得

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

几何意义: 平行四边形两对角线的平方和等于各边平方和.

5.证明: 由第4题知  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

由题目条件  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  知  $z_1 + z_2 = -z_3$

可有  $|z_1 + z_2| = |z_3|$

于是  $|z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_3|^2 = 3$

同理  $|z_2 - z_3|^2 = |z_3 - z_1|^2 = 3$

所以  $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}$

因此  $z_1, z_2, z_3$  是内接于单位圆的等边三角形的顶点.

6.解:(1)表示  $z$  点的轨迹是  $z_1$  与  $z_2$  两点连线的中垂线;不是区域.

(2)令  $z = x + yi$ , 由  $|z| \leq |z - 4|$  得

$$|x + yi| \leq |(x - 4) + yi|, \text{即 } x^2 + y^2 \leq (x - 4)^2 + y^2, \text{得 } x \leq 2$$

因此,  $z$  点的轨迹是以直线  $x = 2$  为右界的右半平面(包括直线);不是区域.

(3)同(2)  $z = x + yi$ , 得  $x > 0$ , 故  $z$  点的轨迹是以虚轴为左界的右半平面(包括虚轴);是区域.

$$(4) \text{由} \begin{cases} 0 < \arg(z - 1) < \frac{\pi}{4} \\ 2 \leq \operatorname{Re} z \leq 3 \end{cases} \text{得} \begin{cases} 0 < \arctan \frac{y}{x-1} < \frac{\pi}{4} \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \text{即} \begin{cases} 0 < y < x - 1 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

可知  $z$  点的轨迹是一梯形(不包括上,下边界);不是区域.

(5)  $z$  点的轨迹是以原点为圆心, 2 为半径以及 (3, 0) 为圆心, 1 为半径得两闭圆的外部. 是区域.

(6)  $z$  点的轨迹的图形位于直线  $\operatorname{Im} z = 1$  的上方(不包括直线  $\operatorname{Im} z = 1$ ) 且在以原点为圆心, 2 为半径的圆内部分(不包括圆弧);是区域.

(7)  $z$  点的轨迹是  $\arg z = \frac{\pi}{4}$ , 半径为 2 的扇形部分;是区域.

(8)  $z$  点的轨迹是以  $(0, \frac{i}{2})$  为圆心,  $\frac{1}{2}$  为半径以及  $(0, \frac{3i}{2})$  为圆心,  $\frac{1}{2}$  为半径的两闭圆的外部. 是区域.

7.证明:已知直线方程一般式为  $ax+by+c=0$  ( $a, b, c$  为实常数,  $a, b$  不全为零).

以  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$  代入化简得

$$\frac{1}{2}(a-bi)z + \frac{1}{2}(a+bi)\bar{z} + c = 0$$

令  $\frac{1}{2}(a+bi) = \alpha \neq 0$  得  $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + c = 0$

反之(逆推可得).

8.证明: 因为  $Z$  平面上的圆周可以写成

$$|z - z_0| = \gamma (\gamma > 0) \quad \text{其中 } z_0 \text{ 为圆心, } \gamma \text{ 为半径}$$

所以  $\gamma^2 = |z - z_0|^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)$

$$= z \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{z}_0 - \bar{z} \cdot z_0 + z_0 \bar{z}_0$$

令  $A=1, B=-z_0, C=\bar{z}_0$ , 从而圆周可以写成

$$A Z \bar{Z} + \bar{B} Z + B \bar{Z} + C = 0 \quad A, C \text{ 为实数, 且 } |B|^2 = |z_0|^2 > |z_0|^2 - \gamma^2 = AC$$

9.证明: 可证  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$  为实数.

10.解:(1)令  $z = x + yi = t(1+i)$ , 得  $x = y$ , 即曲线为一, 三象限的角平分线.

(2)令  $z = x + yi = a \cos t + ib \sin t$ , 得  $x = a \cos t, y = b \sin t$ , 则有

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 故曲线为一椭圆.}$$

(3)令  $z = x + yi = t + \frac{t}{i} (t \neq 0)$ , 可得  $x = t, y = \frac{1}{t}$ , 则  $xy = 1$ , 故曲线为一双曲线.

(4)令  $z = x + yi = t^2 + \frac{1}{t^2}$ , 得  $x = t^2, y = \frac{1}{t^2}$ , 即  $xy = 1 (x > 0, y > 0)$ , 故曲线为双曲线在第一象限内的一支.

11.解:(1)由于  $x^2 + y^2 = |z|^2 = 4$ , 又有  $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}(x - yi)$

$$\text{所以 } u = \frac{x}{4}, v = -\frac{y}{4}, \text{ 则 } u^2 + v^2 = \frac{1}{16}(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}$$

这表示在  $w$  平面上变成的曲线是以原点为圆心,  $\frac{1}{2}$  为半径的圆周.

(2) 将  $y = x$  代入  $w = \frac{1}{x + yi}$ , 即  $u + iv = \frac{1}{x + yi}$  中得

$$u + iv = \frac{1}{x(1+i)} = -\frac{1-i}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{i}{2x}$$

于是  $u = \frac{1}{2x}$ ,  $v = -\frac{1}{2x}$ , 因此  $v = -u$ , 故曲线为  $w$  平面上二、四象限的角分线.

(3) 同上将  $x = 1$  代入变换  $u + iv = \frac{1}{x + yi}$  得

$$u + iv = \frac{1}{1 + yi} = \frac{1 - yi}{1 + y^2}$$

于是  $u = \frac{1}{1 + y^2}$ ,  $v = \frac{-y}{1 + y^2}$ , 且  $u^2 + v^2 = \frac{1 + y^2}{(1 + y^2)^2} = \frac{1}{1 + y^2} = u$

故解得  $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}$ , 这表示曲线变成  $w$  平面上的一个以  $(\frac{1}{2}, 0)$  为圆心,  $\frac{1}{2}$  为半径的圆周.

(4) 因  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ , 即可得  $z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$

将  $z = \frac{1}{w}$ ,  $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$  代入得

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\bar{w}} - \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} = 0, \text{ 即 } \frac{1}{w\bar{w}} = \frac{w + \bar{w}}{w\bar{w}}, \text{ 因此 } w + \bar{w} = 1$$

所以这表示曲线变成  $w$  平面上的一条过  $(\frac{1}{2}, 0)$  且平行于虚轴的直线.

12. 证明: (1) 首先考虑函数  $f(z) = z^n$  在  $z$  平面上的连续性.

对复平面上任意一点  $z_0$ , 来证明  $\lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n$

不妨在圆  $|z| \leq M = |z_0| + 1$  内考虑.

因为  $|z^n - z_0^n| \leq |z - z_0|(|z|^{n-1} + |z|^{n-2}|z_0| + \cdots + |z_0|^{n-1}) \leq |z - z_0|nM^{n-1}$ , 故对  $\forall \varepsilon > 0$ ,

只需取  $\delta \leq \frac{\varepsilon}{nM^{n-1}}$ , 于是当  $|z - z_0| < \delta$  时, 就有  $|z^n - z_0^n| < \varepsilon$ .

(2) 由连续函数运算法则, 两连续函数相除, 在分母不为零时, 仍连续. 因此  $f(z)$  在

$z$  平面上除使分母为零点外都连续.

13. 证明: 令  $f(z) = \begin{cases} \arg z, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \quad -\pi < \arg z < \pi$

分情况讨论:

(1) 若  $z_0 = 0$ , 由于当  $z$  沿直线  $\arg z = \theta_0 (-\pi < \theta_0 < \pi)$  趋于原点时,  $f(z)$  趋于  $\theta_0$ ,

这里  $\theta_0$  可以取不同值, 因而  $f(z)$  在  $z_0 = 0$  处不连续.

(2) 若  $z_0 = x (< 0)$  由定义当  $z$  从上半平面趋于  $z_0$  时,  $f(z)$  趋于  $\pi$ , 当  $z$  从下半

平面趋于  $z_0$  时,  $f(z)$  趋于  $-\pi$ , 所以  $f(z)$  在实轴上不连续.

(3) 其他点  $z_0$ , 作一个以  $z_0$  为中心  $\delta$  为半径的圆, 只要  $\delta$  充分小, 这个圆总可以

不与负实轴相交.

任取  $\operatorname{Arg} z_0$  的一个值  $\theta_0$ , 以  $z_0$  为中心  $\delta$  为半径的圆, 因  $z_n \rightarrow z_0$ , 故存在自然

数  $N$ , 当  $n > N$  时,  $z_n$  落入圆内, 从原点引此圆的两条切线, 则此两条切线夹

角为  $2\varphi(\delta)$ ,  $\varphi(\delta) = \arcsin \frac{\delta}{|z_0|}$ , 因此总可以选取  $\operatorname{Arg} z_n$  的一个值  $\arg z_n$ . 当

$n > N$  时, 有  $|\arg z_n - \theta_0| < \varphi(\delta)$ , 因  $\delta \rightarrow 0$  时,  $\varphi(\delta) \rightarrow 0$ . 因而, 总可以选取  $\delta$ ,

使  $\varphi(\delta)$  小于任何给定的  $\varepsilon > 0$ , 即总有  $|\arg z - \arg z_0| < \varepsilon$ . 因此  $f(z)$  在  $z_0$  连

续.

综上所述得知,  $f(z)$  除原点及负实轴上的点外处处连续.

14. 证明: 由于  $f(z)$  的表达式都是  $x, y$  的有理式, 所以除去分母为零的点

$z = 0$ ,  $f(z)$  是连续的, 因而只须讨论  $f(z)$  在  $z = 0$  的情况.

当点  $z = x + yi$  沿直线  $y = kx$  趋于  $z = 0$  时,

$$f(z) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{k}{1 + k^2} \rightarrow \frac{k}{1 + k^2}$$

这个极限值以  $k$  的变化而不同, 所以  $f(z)$  在  $z = 0$  不连续.

15. 证明: 由  $f(z) = z$  连续即得.

16. 证明:  $1-z$  在  $|z| < 1$  内连续且不为 0, 故  $\frac{1}{1-z}$  在  $|z| < 1$  内连续

$$\exists \varepsilon_0 = 1, \forall \delta > 0 \left( \delta < \frac{1}{2} \right), \text{ 均存在 } z_1 = 1 - \frac{\delta}{4}, z_2 = 1 - \frac{\delta}{2} \text{ 使得 } |z_1 - z_2| = \frac{\delta}{4} < \delta$$

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \frac{1}{1-z_1} - \frac{1}{1-z_2} \right| = \frac{2}{\delta} > 1$$

故  $f(x)$  在  $|z| < 1$  内非一致连续

17. 证明: 必要性: 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 = x_0 + y_0 i$ , 由定义  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $n > N$  时,

恒有  $|z_n - z_0| < \varepsilon$ , 从而由定义知

$$|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$$

$$|y_n - y_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$$

即  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty)$

充分性: 由定义得

$$|z_n - z_0| = |(x_n - x_0) + (y_n - y_0)i| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$$

因此, 当  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty)$  时, 必有  $z_n \rightarrow z_0 (n \rightarrow \infty)$ .

18. 证明: 利用第 17 题, 及关于实数列收敛的柯西准则来证明.

必要性: 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ . 则由定义对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ , 当  $n > N$  时, 恒

$$\text{有 } |z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因而对任何自然数  $p$ , 也有  $|z_{n+p} - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

利用三角不等式及上面两不等式, 当  $n > N$  时, 有

$$|z_{n+p} - z_n| \leq |z_{n+p} - z_0| + |z_n - z_0| < \varepsilon$$

充分性: 设对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$ , 当  $n, n+p > N$  时, 有  $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$ , 由定义

$$\text{得 } |x_{n+p} - x_n| \leq |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

$$|y_{n+p} - y_n| \leq |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

由此根据实数序列的柯西准则,必存在两个实数  $x_0, y_0$ , 使

$$x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty), \text{有}$$

$$z_n = x_n + y_n i \rightarrow x_0 + y_0 i$$

19. 证明: 设  $z_n = x_n + y_n i (|z_n| \leq M (n=1, 2, 3, \dots))$ , 因为  $|x_n|, |y_n| \leq |z_n| \leq M$ , 所以

$\{x_n\}, \{y_n\}$  都有界.

根据实数序列的致密性定理, 知  $\{x_n\}$  有收敛于某常数  $a$  的子序列  $\{x_{n_k}\}$ , 相地在

$x_{n_k} + y_{n_k} i (k=1, 2, \dots)$  中,  $\{y_{n_k}\}$  任有界, 因而  $\{y_{n_k}\}$  也有以收敛于某一常数  $b$  的

子序列  $\{y_{n_{kj}}\}$ , 在  $z_{n_{kj}} = x_{n_{kj}} + y_{n_{kj}} i (j=1, 2, \dots)$  中,  $\{x_{n_k}\}$  任收敛于  $a$ , 因此所设序

列有一收敛于  $a + bi$  的子序列.

20. 证明: (1) 若  $z_0 = 0$ , 则由定义对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ , 当  $n > N$  时有  $\{z_n\} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\text{而 } z'_n = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_N}{n} + \frac{z_{N+1} + z_{N+2} + \dots + z_n}{n}$$

固定  $N$ , 取  $N_0 = \max \left\{ N, \left[ \frac{2}{\varepsilon} |z_1 + z_2 + \dots + z_N| \right] \right\}$ , 则当  $n > N_0$  时, 有

$$\left| \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_N}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{故 } \left| z'_n \right| \leq \left| \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_N}{n} \right| + \left| \frac{z_{N+1} + z_{N+2} + \dots + z_n}{n} \right| < \varepsilon$$

(2) 若  $z_0 \neq 0$ , 则当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - z_0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \left| z'_n - z_0 \right| &= \left| \frac{(z_1 - z_0) + \dots + (z_n - z_0) + n z_0}{n} - z_0 \right| \\ &= \left| \frac{(z_1 - z_0) + \dots + (z_n - z_0)}{n} \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(二)

$$1. \text{解: } \frac{(\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi)^3} = \frac{(e^{i5\varphi})^2}{(e^{i(-3\varphi)})^3} = e^{19\varphi i}$$

$$2. \text{解: 由于 } z = e^{it}, \text{ 故 } z^n = e^{niti} = \cos nt + i \sin nt, z^{-n} = e^{-niti} = \cos nt - i \sin nt$$

$$\text{因此 } z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos nt, z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin nt$$

3. 证明: 已知

$$x_n + iy_n = (1 - i\sqrt{3})^n = 2^n \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^n = 2^n \left( \cos \frac{5n\pi}{3} + i \sin \frac{5n\pi}{3} \right)$$

$$\text{因此 } x_n = 2^n \cos \frac{5n\pi}{3}, y_n = 2^n \sin \frac{5n\pi}{3}$$

$$x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n$$

$$= 2^n 2^{n-1} \left[ \cos \frac{5n\pi}{3} \sin \frac{5(n-1)\pi}{3} - \sin \frac{5n\pi}{3} \cos \frac{5(n-1)\pi}{3} \right]$$

$$= 2^{2n-1} \sin \left( \frac{5(n-1)\pi}{3} - \frac{5n\pi}{3} \right)$$

4. 证明: 第一个不等式等价于

$$\frac{1}{2}(|x| + |y|)^2 \leq |z|^2 = x^2 + y^2, \text{ 即 } x^2 + y^2 + 2|x||y| \leq 2(x^2 + y^2), \text{ 即 } (|x| - |y|)^2 \geq 0$$

这是显然的, 因此第一个不等式成立.

第二个不等式等价于

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2, \text{ 即 } 2|x||y| \geq 0$$

这是显然的, 因此第二个不等式成立.

$$5. \text{证明: 利用公式 } |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \text{ 以及 } \operatorname{Re} z = |z|$$

$$6. \text{证明: 因为 } |z| = 1, \text{ 所以 } \left| \frac{az+b}{bz+a} \right|^2 = \frac{az+b}{bz+a} \cdot \frac{\overline{az+b}}{\overline{bz+a}}$$

$$= \frac{|a|^2 + \bar{a}b\bar{z} + a\bar{b}z + |b|^2}{|b|^2 + \bar{a}b\bar{z} + a\bar{b}z + |a|^2} = 1$$

$$\text{故 } \left| \frac{az+b}{bz+a} \right| = 1$$

7. 解: 设  $z_0$  为对角线  $\overrightarrow{z_1 z_3}$  的中点, 则

$$z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_3) = 1 + 2i$$

分别左旋及右旋向量  $\overrightarrow{z_0 z_3}$  各  $\frac{\pi}{2}$ , 写成复数等式后, 即可由此解得顶点  $z_2$  的坐标

为  $(4, 1)$ ; 顶点  $z_4$  的坐标为  $(-2, 3)$ .

8. 证明: 由于  $\triangle z_1 z_2 z_3$  与  $\triangle w_1 w_2 w_3$  同向相似的充要条件是  $\angle z_3 = \angle w_3$ , 且

$$\frac{|z_2 - z_3|}{|z_1 - z_3|} = \frac{|w_2 - w_3|}{|w_1 - w_3|},$$

$$\text{而 } \angle z_3 = \arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}, \angle w_3 = \arg \frac{w_2 - w_3}{w_1 - w_3}, \text{ 于是有 } \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{w_2 - w_3}{w_1 - w_3}, \text{ 即 } \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

9. 证明:  $z_1, z_2, z_3, z_4$  四点共圆或共直线的充要条件为

$$\angle z_1 z_2 z_3 + \angle z_3 z_4 z_1 = 0 \text{ 或 } \pi$$

$$\text{但 } \angle z_1 z_2 z_3 = \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}, \angle z_3 z_4 z_1 = \arg \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}$$

$$\arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} = \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4},$$

因此  $z_1, z_2, z_3, z_4$  共圆周或共直线的充要条件为  $\frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}$  为实数.

10. 证明: 由  $\overrightarrow{Oz_1} \perp \overrightarrow{Oz_2}$  知  $\arg z_1 - \arg z_2 = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\text{故 } \frac{z_1}{z_2} = \pm \left| \frac{z_1}{z_2} \right| i, \text{ 两边平方即得 } z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = 0, \text{ 反之亦然.}$$

11. 证明: 因为  $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right|^2 = k^2$ , 从而  $\left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right) \left( \frac{\overline{z} - \overline{z_1}}{\overline{z} - \overline{z_2}} \right) = k^2$

$$\text{所以 } |z|^2 - z_1 \overline{z} - \overline{z_1} z + |z_1|^2 = k^2 (|z|^2 - z_2 \overline{z} + |z_2|^2)$$

$$\text{即 } |z|^2 (1 - k^2) - \overline{z} (z_1 - k^2 z_2) - z (\overline{z_1} - k^2 \overline{z_2}) = k^2 |z_2|^2 - |z_1|^2$$

$$\text{亦即 } \left| z - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2} \right|^2 = \frac{k^2 (|z_2|^2 + |z_1|^2 - z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2)}{(1 - k^2)^2} = \frac{k^2 |z_1 - z_2|^2}{(1 - k^2)^2}$$

故有  $\left| z - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2} \right| = k \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - k^2} \right|$ , 此为圆的方程, 该圆圆心为  $z_0 = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}$ , 半径

$$\text{为 } \rho = k \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - k^2} \right| \quad (0 < k \neq 1, z_1 \neq z_2).$$

$$12. \text{证明: } \left| \frac{1-z}{1+z} \right| < 1 \Leftrightarrow |1-z| < |1+z| \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + b^2} < \sqrt{(-1-a)^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow (1-a)^2 + b^2 < (-1-a)^2 + b^2 \Leftrightarrow -2a < 2a \Leftrightarrow a > 0$$

几何意义: 右半平面上的点到(1,0)的距离  $a$  小于到(-1,0)点的距离  $b$ ; 到(1,0)的距离  $a$  小于到(-1,0)点的距离  $b$  的点在右半平面上.

## 第二章 解析函数

### (一)

1. 证明:  $\exists \delta > 0$ , 使  $\forall t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \setminus \{t_0\}$ , 有  $z(t_1) \neq z(t_0)$ , 即  $C$  在  $z(t_0)$  的对应去心邻域内无重点, 即能够联结割线  $\overline{z(t_0)z(t_1)}$ , 是否就存在数列  $\{t_{1n}\} \rightarrow t_0$ , 使  $z(t_{1n}) = z(t_0)$ , 于是有

$$z'(t_0) = \lim_{t_{1n} \rightarrow t_0} \frac{z(t_{1n}) - z(t_0)}{t_{1n} - t_0} = 0$$

此与假设矛盾.

$$t_1 \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow t_1 > t_0$$

$$\text{因为 } \arg \frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0} = \arg [z(t_1) - z(t_0)]$$

$$\text{所以 } \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \arg [z(t_1) - z(t_0)] = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \arg \frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0} = \arg \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0}$$

因此, 割线确实有其极限位置, 即曲线  $C$  在点  $z(t_0)$  的切线存在, 其倾角为  $\arg z'(t_0)$ .

2. 证明: 因  $f(z), g(z)$  在  $z_0$  点解析, 则  $f'(z_0), g'(z_0)$  均存在.

$$\text{所以 } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

$$3. \text{证明: } u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$v(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

于是  $u_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$ , 从而在原点  $f(z)$  满足  $C-R$  条

件,但在原点,  $\frac{f - f'(z)}{z} = \frac{(u+iv) - (u_x(0,0) + iv_x(0,0))}{z}$

$$= \frac{(1+i)[(x)^3 - (y)^3] - (1+i)z}{[(x)^3 + (y)^3]z}$$

当  $z$  沿  $y = x \rightarrow 0$  时,有  $\frac{f - f'(z)}{z} = \frac{-(1+i)}{2(x)^2}$

故  $f(z)$  在原点不可微.

4. 证明: (1) 当  $z \neq 0$  时, 即  $x, y$  至少有一个不等于 0 时, 或有  $u_x \neq u_y$ , 或有  $-u_x \neq u_y$ ,

故  $|z|$  至多在原点可微.

(2) 在  $C$  上处处不满足  $C-R$  条件.

(3) 在  $C$  上处处不满足  $C-R$  条件.

(4)  $\frac{1}{z} = \frac{z}{zz} = \frac{x+yi}{x^2+y^2}$ , 除原点外, 在  $C$  上处处不满足  $C-R$  条件.

5. 解: (1)  $u(x, y) = xy^2, v(x, y) = x^2y$ , 此时仅当  $x = y = 0$  时有

$$u_x = y^2 = v_y = x^2, u_y = 2xy = -v_x = -2xy$$

且这四个偏导数在原点连续, 故  $f(z)$  只在原点可微.

(2)  $u(x, y) = x^2, v(x, y) = y^2$ , 此时仅当  $x = y$  这条直线上时有

$$u_x = 2x = v_y = 2y, u_y = 0 = -v_x = 0$$

且在  $x = y$  这四个偏导数连续, 故  $f(z)$  只在  $x = y$  可微但不解析.

(3)  $u(x, y) = 2x^3, v(x, y) = 3y^3$ , 且

$$u_x = 6x^2 = v_y = 9y^2, u_y = 0 = -v_x = 0$$

故只在曲线  $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{2} = 0$  上可微但不解析.

(4)  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2, v(x, y) = 3x^2y - y^3$  在全平面上有

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y = 3x^2 - 3y^2, u_y = -6xy = -v_x = -6xy$$

且在全平面上这四个偏导数连续,故可微且解析.

6.证明:(1)  $\forall z = x + yi \in D, 0 = f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

(2) 设  $f(z) = u + iv$ . 则  $\overline{f(z)} = u - iv$ , 由  $f(z)$  与  $\overline{f(z)}$  均在  $D$  内解析知

$$u_x = v_y, u_y = -v_x, u_x = -v_y, u_y = v_x,$$

结合此两式得  $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ , 故  $u, v$  均为常数,故  $f(z)$  亦为常数.

(3) 若  $|f(z)| = C = 0$ , 则显然  $f(z) \equiv 0$ , 若  $|f(z)| = C \neq 0$ , 则此时有  $f(z) \neq 0$ , 且

$$\overline{f(z)}f(z) = C^2, \text{即 } \overline{f(z)} = \frac{C^2}{f(z)} \text{ 也时解析函数,由(2)知 } f(z) \text{ 为常数.}$$

(4) 设  $f(z) = u + iv$ , 若  $u(x, y) \equiv C$ , 则  $u_x \equiv 0, u_y \equiv 0$ , 由  $C-R$  条件得

$$v_x = -u_y \equiv 0, v_y = u_x \equiv 0$$

因此  $u, v$  为常数, 则  $f(z)$  亦为常数.

7.证明: 设  $f = u + iv, g = i\overline{f} = p + iQ$  则  $\overline{f} = u - iv, g = v - iu$ , 由  $f(z)$  在  $D$  内解析

$$\text{知 } u_x = v_y, u_y = -v_x$$

$$\text{从而 } p_x = v_x = -u_y = Q_y, p_y = v_y = u_x = -$$

因而  $g(z)$  亦  $D$  内解析.

8.解:(1) 由  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2, v(x, y) = 3x^2y - y^3$ , 则有

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, u_y = -6xy, v_x = 6xy, v_y = 3x^2 - 3y^2$$

故  $u_x, u_y, v_x, v_y$  为连续的, 且满足  $C-R$  条件, 所以  $f(z)$  在  $z$  平面上解析, 且

$$f'(z) = u_x + v_x i = (3x^2 - 3y^2) + 6xyi = 3z^2$$

(2)  $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y) \cdot v(x, y) = e^x (y \cos y - x \sin y)$

$$u_x = e^x (x \cos y - y \sin y + \cos y) = v_y$$

$$u_y = e^x (-x \sin y - \sin y) = -y e^x = -v_x$$

故  $f(z)$  在  $z$  平面上解析, 且

$$f'(z) = e^x [\cos y \cdot (x+1) - y \sin y] + i e^x [\sin y \cdot (x+1) - y \cos y]$$

(3) 由  $u(x, y) = \sin x \cosh y, v(x, y) = \cos x \sinh y$ , 则有

$$u_x = \cosh y, u_y = \sin x \cosh y, v_x = -\sin x \sinh y, v_y = \cos x \cosh y$$

故  $u_x, u_y, v_x, v_y$  为连续的, 且满足  $C-R$  条件, 所以  $f(z)$  在  $z$  平面上解析, 且

$$f'(z) = u_x + v_x i = \cosh y + i \sinh y = e^z$$

(4) 由  $u(x, y) = \cos x \cosh y, v(x, y) = -\sin x \sinh y$ , 则有

$$u_x = -\sinh y, u_y = \cos x \cosh y, v_x = -\cos x \sinh y, v_y = -\sin x \sinh y$$

故  $u_x, u_y, v_x, v_y$  为连续的, 且满足  $C-R$  条件, 所以  $f(z)$  在  $z$  平面上解析, 且

$$f'(z) = u_x + v_x i = -\sinh y + i \cosh y = i e^{iz}$$

9. 证明: 设  $z = x + yi = re^{i\theta}$ , 则  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ,

$$\text{从而 } u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, u_\theta = -u_x r \sin \theta + u_y r \cos \theta$$

$$v_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta, v_\theta = -v_x r \sin \theta + v_y r \cos \theta,$$

再由  $u_r = \frac{1}{r} v_\theta, v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$ , 可得  $u_x = v_y, u_y = -v_x$ , 因此可得  $f(z)$  在点  $z$  可微且

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x - i u_y = (r \cos \theta u_r - \sin \theta u_\theta) \frac{1}{r} - i (r \sin \theta u_r + \cos \theta u_\theta) \frac{1}{r} \\ &= (\cos \theta - i \sin \theta) u_r - \frac{1}{r} (\sin \theta + i \cos \theta) u_\theta \\ &= (\cos \theta - i \sin \theta) u_r + (\sin \theta + i \cos \theta) v_r \\ &= (\cos \theta - i \sin \theta) (u_r + i v_r) \\ &= \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} (u_r + i v_r) = \frac{r}{z} (u_r + i v_r) \end{aligned}$$

10. 解: (1)  $|e^{i-2z}| = |e^{-2x+i(1-2y)}| = e^{-2x}$

$$(2) |e^{z^2}| = |e^{z^2 - y^2 + 2xyi}| = e^{z^2 - y^2}$$

$$(3) e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+iy}} = e^{\frac{x-yi}{x^2+y^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdot e^{-\frac{y}{x^2+y^2}i}$$

$$\text{所以 } \operatorname{Re}\left(e^{\frac{1}{z}}\right) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \frac{y}{x^2+y^2}$$

11. 证明: (1) 因为  $e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$

$$\text{因此 } \overline{e^z} = e^x (\cos y - i \sin y)$$

$$\text{而 } e^{\bar{z}} = e^{x-yi} = e^x \cdot e^{-yi} = e^x (\cos y - i \sin y), \text{ 得证.}$$

$$(2) \text{ 因为 } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\text{所以 } \sin \bar{z} = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \frac{\overline{e^{-iz} + e^{-iz}}}{2i} = \overline{\sin z}$$

$$(3) \text{ 因为 } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\text{所以 } \cos \bar{z} = \frac{e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}}{2} = \frac{\overline{e^{-iz} + e^{iz}}}{2} = \overline{\cos z}$$

12. 证明: 分别就  $m$  为正整数, 零, 负整数的情形证明, 仅以正整数为例

当  $m=1$  时, 等式自然成立.

假设当  $m=k-1$  时, 等式成立.

那么当  $m=k$  时,  $(e^z)^k = (e^z)^{k-1} \cdot e^z = e^{kz}$ , 等式任成立.

故结论正确.

13. 解: (1)  $e^{3+i} = e^3 \cdot e^i = e^3 (\cos 1 + i \sin 1)$

$$\begin{aligned} (2) \cos(1-i) &= \frac{e^{i(1-i)} + e^{-i(1-i)}}{2} \\ &= \frac{e^{1+i} + e^{-i(1+i)}}{2} \\ &= \frac{\cos\left(1 + \frac{1}{e}\right) + i \frac{1}{e} \sin\left(1 + \frac{1}{e}\right) + \cos\left(1 - \frac{1}{e}\right) - i \frac{1}{e} \sin\left(1 - \frac{1}{e}\right)}{2} \end{aligned}$$

14. 证明: (1) 由于  $f(z) = \sin z, g(z) = z$  在点  $z=0$  解析

且  $f(0) = g(0) = 0, g'(0) = 1 \neq 0$

$$\text{因此 } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{\cos z}{1} \Big|_{z=0} = 1$$

(2) 由于  $f(z) = e^z - 1, g(z) = z$  在点  $z=0$  解析, 且  $f(0) = g(0) = 0, g'(0) = 1 \neq 0$

$$\text{因此 } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = e^z \Big|_{z=0} = 1$$

(3) 由于  $f(z) = z - z \cos z, g(z) = z - \sin z$  在点  $z=0$  解析,

且  $f(0) = g(0) = 0, f'(0) = g'(0) = 0, f''(0) = g''(0) = 0, g'''(0) = 1$

$$\text{因此 } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - z \cos z}{z - \sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z + z \sin z}{1 - \cos z} = 3$$

$$15. \text{证明: } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\begin{aligned} & \cos a + \cos(a-b) + \cdots + \cos(a+nb) \\ &= \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} + \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} + \cdots + \frac{e^{i(a+nb)} + e^{-i(a+nb)}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{ia} \cdot \frac{1 - e^{i(n+1)b}}{1 - e^{ib}} + e^{-ia} \cdot \frac{1 - e^{-i(n+1)b}}{1 - e^{-ib}} \right] \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2}b}{\sin \frac{b}{2}} \cos(a + \frac{nb}{2}) = \text{右边} \end{aligned}$$

同理证明(2).

$$16. \text{证明: (1) } \sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i \cdot \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \sinh z$$

$$(2) \cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

$$(3) \sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \sin z$$

$$(4) \cosh(iz) = \cos(i \cdot iz) = \cos(-z) = \cos z$$

$$(5) \tan(iz) = \frac{\sin(iz)}{\cos(iz)} = \frac{i \sinh z}{\cosh z} = i \tanh z$$

$$(6) \tanh(iz) = \frac{\sinh(iz)}{\cosh(iz)} = \frac{i \sin z}{\cos z} = i \tan z$$

$$17. \text{证明:} (1) \quad ch^2 z - sh^2 z = ch^2 z + (ishz)^2 = \cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1$$

$$(2) \quad \sec h^2 z + th^2 z = \frac{1}{ch^2 z} + \frac{sh^2 z}{ch^2 z} = \frac{1 + sh^2 z}{ch^2 z} = 1$$

$$(3) \quad ch(z_1 + z_2) = \cos(iz_1 + iz_2) = \cos(iz_1) \cos(iz_2) - \sin(iz_1) \sin(iz_2) \\ = ch z_1 ch z_2 + sh z_1 sh z_2$$

$$18. \text{证明:} (1) \quad \sin z = \sin(x + yi) = \sin x \cos(yi) + \cos x \sin(iy) = \sin x chy + i \cos x shy$$

$$(2) \quad \cos z = \cos(x + yi) = \cos x \cos(yi) - \sin x \sin(iy) = \cos x chy - i \sin x shy$$

$$(3) \quad |\sin z|^2 = |\sin x chy + i \cos x shy|^2 = \sin^2 x ch^2 y + \cos^2 x sh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

$$(4) \quad |\cos z|^2 = |\cos x chy - i \sin x shy|^2 = \cos^2 x ch^2 y + \sin^2 x sh^2 y = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

$$19. \text{证明:} (shz)' = \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = chz$$

$$(chz)' = \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = shz$$

$$20. \text{解:} (1) \quad z = \ln(1 + \sqrt{3}i) = \ln|1 + \sqrt{3}i| + i \arg(1 + \sqrt{3}i) \\ = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

$$(2) \text{由于 } \ln z = \frac{\pi i}{2}, \text{ 则有 } z = e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$(3) \text{由于 } e^z = -1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}, \text{ 故 } z = i(\pi + 2k\pi)$$

$$(4) \cos z = -\sin z, \text{ 即 } \tan z = -1, \text{ 所以}$$

$$z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1-i}{1+i} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\begin{aligned}
 (5) \text{ 设 } z = x + iy, \text{ 由 } \operatorname{tg} z = 1 + 2i \text{ 得 } \frac{\sin z}{\cos z} = 1 + 2i &\rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = (i-2)(e^{iz} + e^{-iz}) \\
 \rightarrow e^{2iz} = -\frac{2}{5} + \frac{i}{5} \rightarrow e^{-2y} \cos 2x = -\frac{2}{5}, \sin 2x = \frac{1}{5} \\
 \rightarrow e^{-4y} = \frac{1}{5}, y = \frac{\ln 5}{4} \text{ 且 } \operatorname{tg} 2x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{2} \right) + \pi \right] \\
 \rightarrow z = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{2} \right) + \pi \right] + \frac{\ln 5}{4} i
 \end{aligned}$$

21. 证明: 因  $\ln(z-1) = \ln(re^{i\theta} - 1) = \ln|re^{i\theta} - 1| + i \arg(re^{i\theta} - 1)$ , 所以

$$\operatorname{Re}[\ln(z-1)] = \ln|re^{i\theta} - 1| = \ln \sqrt{(re^{i\theta} - 1)^2 + (r \sin \theta)^2} = \frac{1}{2} \ln(1 + r^2 - 2r \cos \theta)$$

22. 解:  $w_k(z) = \sqrt[3]{r(z)} e^{\frac{i\theta(z)+2k\pi}{3}}, (z \in G; 0 < \theta(z) < 2\pi; k=0,1,2)$

利用  $w(i) = -i$  定  $k, k=2$ , 再计算  $w_2(-i)$

23. 解:  $-2 = 2e^{i\pi}, i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ , 由  $w(-2) = -\sqrt[3]{2}$  定  $k, k=1$ , 再计算  $w_1(i) = e^{\frac{5}{4}\pi}$

24. 解:  $(1+i)^i = e^{i \ln(1+i)} = e^{i[\ln|1+i| + i \arg(1+i) + 2k\pi]} = e^{i \ln \sqrt{2} - (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$

$$= e^{i \ln \sqrt{2}} \cdot e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$3^i = e^{i \ln 3} = e^{i[\ln 3 + i(\arg 3 + 2k\pi)]} = e^{i \ln 3} \cdot e^{-2k\pi} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

25. 解:  $z$  在  $z$  平面上沿  $z=0$  为圆心,  $R>1$  为半径的圆周  $C$  从  $A$  走到  $B$ , 经过变换

$w = z^4$ , 其象点  $w$  在  $w$  平面上沿以  $w=0$  为心,  $R^4>1$  为半径的象圆周从  $A'$  走

到  $B'$ , 刚好绕  $w = \sqrt{w+1}$  的支点  $-1$  转一整周, 故它在  $B'$  的值为  $\sqrt{w+1}B'$ . 因此

$$f(z) \Big|_B = -f(z) \Big|_A = -\sqrt{R^4+1}.$$

26. 证明:  $\because f(z) = \sqrt[3]{(1-z)z^2}$  可能的支点为  $0, 1, \infty$

由于  $3 \nmid 1+2$ , 故  $f(z)$  的支点为  $z=0, 1$ , 因此在将  $z$  平面沿实轴从  $0$  到  $1$  割

开后, 就可保证变点  $z$  不会单绕  $0$  或者说转一周, 于是在这样割开后的  $z$

平面上  $f(z)$  就可以分出三个单值解析分支.

另由已知  $\arg(z) = \pi$  得

$$\begin{aligned}
 f(i) &= \sqrt[3]{1 - |i|^2} \cdot n! e^{i\Delta_0} e^{i\pi g(i)} \\
 &= -\sqrt[6]{2} e^{\frac{i}{3}[\Delta_0 + \pi(g-1) + \Delta_0 - \pi^2]} \\
 &= -\sqrt[6]{2} e^{\frac{i}{3}[\frac{3}{4}\pi + 2\frac{\pi}{4}]} \\
 &= -\sqrt[6]{2} e^{\frac{7\pi i}{12}}.
 \end{aligned}$$

## (二)

1. 证明: 由  $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$  得  $f'(z) = \frac{1+z^2}{(1-z^2)^2}$ , 从而于是  $f(z)$  在  $D$  必常数

$$z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1+z^2}{1-z^2} = \frac{(1+z^2)(1-\bar{z}^2)}{(1-z^2)(1-\bar{z}^2)} = \frac{1-|z|^4 + (2\operatorname{Im} z^2)i}{1+|z|^4 - 2\operatorname{Re} z^2}$$

$$\text{所以 } \operatorname{Re}\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) = \frac{1-|z|^4}{1+|z|^4 - 2\operatorname{Re} z^2}$$

由于  $|z| < 1$ , 因此  $1-|z|^4 > 0$ , 且

$$1+|z|^4 - 2\operatorname{Re} z^2 \geq 1+|z|^4 - 2|z|^2 = (1-|z|^2)^2 > 0$$

$$\text{故 } \operatorname{Re}\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0.$$

2. 证明: 同第一题

$$1+z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2 + 2i\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}.$$

3. 证明: 题目等价域以下命题: 设  $E, E_1$  为关于实轴对称的区域, 则函数在  $E$  内解析

$$\Rightarrow \overline{f(z)} \text{ 在 } E_1 \text{ 内解析.}$$

设  $f(z)$  在  $E$  内解析, 对任意的  $z_0 \in E_1$ , 当  $z \in E_1$  时, 有  $\bar{z}_0 \in E, \bar{z} \in E$ , 所以

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(z_0)}}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{f(z) - f(z_0)}}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \overline{f'(z_0)}$$

这是因为  $f(z)$  在  $E$  内解析, 从而有  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$ , 由  $z_0$  的任意性可知,

$\overline{f(z)}$  在  $E_1$  内解析.

4. 证明: (1) 由于  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ , 根据复合函数求偏导数的法则, 即可得

证.

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\text{所以 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ 得 } \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

5. 证明:  $|\sin z| = |\sin(x + yi)| = \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + (1 - \sin^2 x) \sinh^2 y} = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$

$$\text{所以 } |shy| \leq \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x} = |\sin z|$$

而  $|sh| \geq |y| = |\operatorname{Im} z|$ , 故左边成立.

右边证明可应用  $\sin z$  的定义及三角不等式来证明.

6. 证明: 有  $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \leq 1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y \leq \cosh^2 R$

$$\text{即 } |\sin z| \leq \cosh R$$

$$\text{又有 } |\cos z|^2 = \cos^2 x + \cosh^2 y \leq 1 + \cosh^2 y = \sinh^2 y \leq \sinh^2 R$$

7. 证明: 据定义, 任两相异点  $z_1, z_2$  为单位圆  $|z| < 1$ , 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| &= \left| \frac{(z_1^2 + 2z_1 + 3) - (z_2^2 + 2z_2 + 3)}{z_1 - z_2} \right| \\ &= |z_1 + z_2 + 2| \geq 2 - |z_1| - |z_2| > 2 - 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

故函数  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内是单叶的.

8. 证明: 因为  $f(z)$  有支点  $-1, 1$ , 取其割线  $[-1, 1]$ , 有

$$(1) \Delta_{c_1} \arg f(z) = -\frac{\pi}{8}, f(i) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i}$$

$$(2) \Delta_{c_2} \arg f(z) = -\frac{11\pi}{8}, \Delta_{c_3} \arg f(z) = -\frac{5\pi}{8}, f(-i) = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{8}i}$$

9.解: 因为  $f(z)$  有支点  $1, \pm i, \infty$ , 此时支割线可取为: 沿虚轴割开  $[-i, i]$ , 沿实轴割开

$[1, +\infty]$ , 线路未穿过支割线, 记线路为  $C$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_c \arg f(z) &= \frac{1}{2} [\Delta_c \arg(1-z) + \Delta_c \arg(z-(-i)) + \Delta_c \arg(z \cdot i)] \\ &= \frac{1}{2} [0 - \pi] = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

故  $f(z) = -\sqrt{5}i$ .

10.证明: 因为  $f(z) = \sqrt{z(1-z)}$  的可能支点为  $z=0, 1, \infty$ , 由题知  $f(z)$  的支点为

$z=0, 1$ , 于是在割去线段  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$  的平面上变点就不可能性单绕 0 或 1 转一

周, 故此时可出两个单值解析分支, 由于当  $z$  从支割线上岸一点出发, 连

续变动到  $z=-1$  时, 只  $z$  的幅角共增加  $\frac{\pi}{2}$ , 由已知所取分支在支割线上岸

取正值, 于是可认为该分支在上岸之幅角为 0, 因而此分支在  $z=-1$  的幅角

为  $\frac{\pi}{2}$ , 故  $f(-1) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i} = \sqrt{2}i$ ,  $f'(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{16}i$ .

### 第三章 复变函数的积分

#### (一)

1. 解:  $y=x(0 \leq x \leq 1)$  为从点 0 到  $1+i$  的直线方程, 于是

$$\begin{aligned}\int_C (x-y+ix^2)dz &= \int_0^{1+i} (x-y+ix^2)d(x+iy) \\ &= \int_0^1 (x-x+ix^2)d(x+ix) = (1+i)i \int_0^1 x^2 dx \\ &= (i-1) \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1-i}{3}\end{aligned}$$

2. 解: (1)  $C: z=x, -1 \leq x \leq 1$ , 因此  $\int_C |z|dz = \int_{-1}^1 |x|dx = 1$

(2)  $C: z=e^{i\theta}$ ,  $\theta$  从  $\pi$  变到 0, 因此

$$\int_C |z|dz = \int_{\pi}^0 de^{i\theta} = i \int_{\pi}^0 e^{i\theta} d\theta = 2$$

(3) 下半圆周方程为  $z=e^{i\theta}$ ,  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ , 则

$$\int_C |z|dz = \int_{\pi}^{2\pi} de^{i\theta} = i \int_{\pi}^{2\pi} ie^{i\theta} d\theta = 2$$

3. 证明: (1)  $C: x=0, -1 \leq y \leq 1$

因为  $|f(z)| = |x^2 + y^2 i| = |iy^2| \leq 1$ , 而积分路径长为  $|i - (-i)| = 2$

故  $\left| \int_C (x^2 + iy^2)dz \right| = \left| \int_{-i}^i (x^2 + iy^2)dz \right| \leq 2$ .

(2)  $C: x^2 + y^2 = 1, x \geq 0$

而  $|f(z)| = |x^2 + iy^2| = \sqrt{x^4 + y^4} \leq 1$ , 右半圆周长为  $\pi$ ,

所以  $\left| \int_C (x^2 + iy^2)dz \right| \leq \pi$ .

4. 解: (1) 因为距离原点最近的奇点  $z = \pm \frac{\pi}{2}$ , 在单位圆  $|z| \leq 1$  的外部, 所以  $\frac{1}{\cos z}$  在

$|z| \leq 1$  上处处解析, 由柯西积分定理得  $\int_C \frac{dz}{\cos z} = 0$ .

(2)  $\frac{1}{z^2 + 2z + 2} = \frac{1}{(z+1)^2 + 1}$ , 因奇点  $z = -1+i$  在单位圆  $|z| \leq 1$  的外部, 所以

$\frac{1}{z^2 + 2z + 2}$  在  $|z| \leq 1$  上处处解析, 由柯西积分定理得  $\int_C \frac{dz}{z^2 + 2z + 2} = 0$ .

(3)  $\frac{e^z}{z^2+5z+6} = \frac{e^z}{(z+2)(z+3)}$ , 因奇点  $z = -2, -3$  在单位圆  $|z| \leq 1$  的外部, 所以

$$\frac{e^z}{z^2+5z+6} \text{ 在 } |z| \leq 1 \text{ 上处处解析, 由柯西积分定理得 } \int_C \frac{e^z}{z^2+5z+6} dz = 0.$$

(4) 因为  $z \cos z^2$  在  $|z| \leq 1$  上处处解析, 由柯西积分定理得

$$\int_C z \cos z^2 dz = 0.$$

5. 解: (1) 因  $f(z) = (z+2)^2$  在  $z$  平面上解析, 且  $\frac{(z+2)^3}{3}$  为其一原函数, 所以

$$\int_{-2}^{-2+i} (z+2)^2 dz = \left. \frac{(z+2)^3}{3} \right|_{-2}^{-2+i} = -\frac{i}{3}$$

(2) 设  $z = (\pi + 2i)t$ , 可得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi+i} \cos \frac{z}{2} dz &= \int_0^1 \cos \left( \frac{\pi+2i}{2} t \right) (\pi+2i) dt = \frac{\pi+2i}{2} \int_0^1 (e^{-t} e^{\frac{i}{2}t} + e^t e^{-\frac{i}{2}t}) dt \\ &= e + e^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \text{ 解: } \int_0^{2\pi a} (2z^2+8z+1) dz &= \left[ \frac{2}{3} z^3 + 4z^2 + z \right]_0^{2\pi a} \\ &= \frac{2}{3} 8\pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a \end{aligned}$$

7. 证明: 由于  $f(z), g(z)$  在单连通区域  $D$  内解析, 所以  $f(z)g(z), [f(z)g(z)]'$  在  $D$  内解析, 且  $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$  仍解析, 所以  $f(z)g(z)$  是  $f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$  的一个原函数.

$$\text{从而 } \int_{\alpha}^{\beta} [f'(z)g(z) + f(z)g'(z)] dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta}$$

$$\text{因此得 } \int_{\alpha}^{\beta} f(z)g'(z) dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(z)g(z) dz.$$

8. 证明:  $\because |z| = 1, \therefore \int_{|z|=1} \frac{dz}{z+2} = 0$

$$\text{设 } z = e^{i\theta}, dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^{2\pi} \frac{i e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(i \cos \theta - \sin \theta)[(\cos \theta + 2) - i \sin \theta]}{(\cos \theta + 2)^2 + \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{-2 \sin \theta + i(1 + 2 \cos \theta)}{5 + 4 \cos \theta} d\theta \\
 \text{于是 } \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta &= 0, \text{ 故 } \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

9. 解: (1) 因为  $f(z) = 2z^2 - z + 1$  在  $|z| \leq 2$  上是解析的, 且  $z=1 \in |z| \leq 2$ , 根据柯西公式得

$$\int_{|z|=2} \frac{2z^2 - z + 1}{z-1} dz = 2\pi i (2z^2 - z + 1) \Big|_{z=1} = 4\pi i$$

(2) 可令  $f(z) = 2z^2 - z + 1$ , 则由导数的积分表达式得

$$\int_{|z|=2} \frac{2z^2 - z + 1}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(z) \Big|_{z=1} = 6\pi i$$

10. 解: (1) 若  $C$  不含  $z=\pm 1$ , 则  $\int_C \frac{\sin \frac{\pi}{4} z dz}{z^2 - 1} = 0$

(2) 若  $C$  含  $z=1$  但不含有  $z=-1$ , 则  $\int_C \frac{\sin \frac{\pi}{4} z dz}{z^2 - 1} = 2\pi i \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i$

(3) 若  $C$  含有  $z=-1$ , 但不含  $z=1$ , 则:  $\int_C \frac{\sin \frac{\pi}{4} z dz}{z^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i$

(4) 若  $C$  含有  $z=\pm 1$ , 则

$$\int_C \frac{\sin \frac{\pi}{4} z dz}{z^2 - 1} = \int_C \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} z \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz = \frac{2\pi i}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \pi i$$

$$\begin{aligned}
 11. \text{ 证明: } \int_C \frac{e^z}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos \theta + i \sin \theta}}{\cos \theta + i \sin \theta} d(\cos \theta + i \sin \theta) = \int_0^{2\pi} (e^{\cos \theta} - e^{i \sin \theta}) i d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} -e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta) + i e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\text{再利用柯西积分公式 } \int_C \frac{e^z}{z} dz = \int_C \frac{e^\xi}{\xi - 0} d\xi = 2\pi i$$

则  $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = 2\pi$ , 由于  $e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta)$  关于  $\theta = \pi$  对称, 因此

$$\int_0^{\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = \pi$$

12. 解: 令  $\varphi(\xi) = 3\xi^2 + 7\xi + 1$ , 则

$$f(z) = \int_C \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i \varphi(z) = 2\pi i (3z^2 + 7z + 1)$$

$$\text{则 } f'(z) = 2\pi i (6z + 7)$$

$$\text{因此 } f'(1+i) = 2\pi i (6+6i+7) = 2\pi(-6+16i)$$

13. 证明: 利用结论:  $f(z)$  在  $D$  内单叶解析, 则有  $f'(z) \neq 0$

由题知,  $C: z = z(t) (a \leq t \leq b)$  为  $D$  内光滑曲线, 由光滑曲线的定义有

1)  $C$  为若尔当曲线, 即  $t_1 \neq t_2$  时,  $z(t_1) \neq z(t_2)$ ;

2)  $z'(t) \neq 0$ , 且连续于  $[a, b]$

要证  $\Gamma$  为光滑曲线, 只须验证以上两条即可.

而在  $w = f(z)$  的变换下,  $C$  的象曲线下的参数方程为

$$\Gamma: w = u(t) = f[z(t)] (a \leq t \leq b)$$

1) 因  $t_1 \neq t_2$  时,  $z(t_1) \neq z(t_2)$ , 又因  $f(z)$  在  $D$  内单叶解析, 所以当  $t_1 \neq t_2$

时,  $f(z_1) \neq f(z_2)$ , 因此当  $t_1 \neq t_2$  时, 有  $u(t_1) \neq u(t_2)$ .

2) 因为  $z'(t) \neq 0$  且连续于  $[a, b]$ , 又因  $f'(z) \neq 0$ , 则由解析函数的无穷可微性

知  $f''(z)$  在  $D$  内也存在, 所以  $f'(z)$  在  $D$  内也连续, 则由复合函数求导法则

$$u'(t) = f'(z) z'(t) \neq 0, \text{ 且连续于 } [a, b].$$

14. 证明: 由上题知  $C$  和  $\Gamma$  均为光滑曲线, 因  $\Phi(w)$  沿  $\Gamma$  连续以及  $f(z), f''(z)$  在包

含  $C$  的区域  $D$  内解析, 因此  $\Phi[f(z)] f'(z)$  也连续, 故公式中的两端积分存在. 则

$$\begin{aligned} \int_C \Phi[f(z)] f'(z) dz &= \int_a^b \Phi[f(z(t))] f'(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b \Phi[u(t)] u'(t) dt = \int_{\Gamma} \Phi(w) dw \end{aligned}$$

15. 证明: 应用刘维尔定理, 因  $|f(z)|$  恒大于一正的常数, 则  $\frac{1}{|f(z)|}$  必恒小于一正的

常数, 则  $\frac{1}{f(z)}$  为常数, 故  $f(z)$  为常数.

16. 解: (1) 因为  $u = x^2 + xy - y^2$ , 所以有  $u_x = 2x + y \Rightarrow v_y = 2x + y$

$$\Rightarrow v = 2xy + \frac{y^2}{2} + c(x)$$

$$\Rightarrow v_x = 2y + c'(x) = -u_y = 2y - x$$

$$\Rightarrow c'(x) = -x \Rightarrow c(x) = -\frac{x^2}{2} + D$$

$$\Rightarrow f(z) = (x^2 + xy - y^2) + (2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + D)y$$

由已知  $f(i) = -1 + i \Rightarrow -1 + i = -1 + \frac{i}{2} + Di \Rightarrow D = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(z) = (x^2 + xy - y^2) + i(2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2})$$

(2) 由  $C-R$  条件,  $v_y = u_x = e^x(x \cos y - y \sin y) + e^x \cos y$ , 则

$$v = \int (xe^x \cos y - e^x y \sin y + e^x \cos y) dy$$

$$= xe^x \sin y + e^x \sin y - \int e^x y \sin y dy$$

$$= xe^x \sin y + e^x y \cos y + \phi(x)$$

又因  $u_y = -v_x$ , 故

$$-e^x \sin y - e^x \sin y - e^x y \cos y = -(e^x \sin y + xe^x \sin y + e^x \cos y + \Phi'(x))$$

即  $\Phi'(x) = 0, \Phi(x) = C$ , 故

$$f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y) + i(xe^x \sin y + e^x y \cos y + C)$$

又因  $f(0) = 0$ , 故  $f(0) = iC = 0 \Rightarrow C = 0$ , 所以

$$f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y) + i(xe^x \sin y + e^x y \cos y)$$

(3) 由  $C-R$  条件,  $u_y = -v_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ , 所以

$$u = \int \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \varphi(x)$$

又因  $v_y = u_x$ , 故  $(-\frac{x}{x^2 + y^2})'_x + \varphi'(x) = (\frac{y}{x^2 + y^2})'_y$ , 即  $\varphi'(x) = 0$ .

所以  $\varphi(x) = C$ , 故

$$f(z) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + C + i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

又因为  $f(2) = 0$ , 所以  $C = \frac{1}{2}$ , 故

$$f(z) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

17. 证明: 设  $f(z) = u + iv \Rightarrow 4|f'(z)|^2 = 4(u_x^2 + v_x^2)$

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2, \quad \frac{\partial |f(z)|^2}{\partial x} = 2uu_x + 2vv_x$$

$$\frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial x^2} = 2u_x^2 + 2uu_{xx} + 2v_x^2 + 2vv_{xx}$$

同理可得:  $\frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial y^2} = 2u_y^2 + 2uu_{yy} + 2v_y^2 + 2vv_{yy}$

于是结合  $C-R$  条件及  $u, v$  为调和函数可得:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2 &= 4(u_x^2 + v_x^2) + 2u(u_{xx} + u_{yy}) + 2v(v_{xx} + v_{yy}) \\ &= 4(u_x^2 + v_x^2) = 4|f'(z)|^2 \end{aligned}$$

18. 证明:  $f(z)$  在  $D$  内解析, 则  $f'(z)$  在  $D$  内也解析. 已知  $f'(z) \neq 0$ , 则  $\ln f'(z)$  在

$D$  内解析, 于是其实部  $\ln |f'(z)|$  为  $D$  内的调和函数.

19. 解:  $f(z) = \int_{z_0}^z \overline{u(z)} dz = -\frac{k}{2} z^2$

势函数和流函数分别为  $\varphi(x, y) = kxy$

$$\varphi(x, y) = -\frac{k}{2}(x^2 - y^2)$$

$$\varphi(x, y) = -\frac{k}{2}(x^2 - y^2)$$

故势线和流线为双曲线.

20. 解: 根据流量和环量的定义来计算

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{x^2 - y^2 - 1}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2} - \frac{2xy}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2}i$$

$$\text{环量 } \Gamma_{C_1} = \int_{C_1} \frac{x^2 - y^2 - 1}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2} dx - \frac{2xy}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2} dy = 0$$

$$\text{流量为 } \int_{C_1} \frac{x^2 - y^2 - 1}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2} dy + \frac{2xy}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2} dx = 0$$

同理, 在  $C_2, C_3$  处也为 0.

## (二)

1. 答:  $f(z)$  不必需要在  $z=0$  解析, 如  $f(z) = \frac{1}{z}$  在  $z=0$  处不解析.

2. 解: 若沿负实轴  $(-\infty, 0]$  隔开  $z$  平面,  $\sqrt{z}$  就能分成两个单值解析分支, 即

$$(\sqrt{z})_k = \sqrt{z} e^{\frac{\arg z + 2k\pi}{2}} \quad (-\pi < \arg z < \pi, k=0,1)$$

(1) 在  $C_1: z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$  上,  $\sqrt{z}$  取主值支, 这时 (1) 式中  $\arg z$  代换为  $\theta, k=0$ ,

$$\text{则 } \sqrt{z} = e^{\frac{i\theta}{2}}, \text{ 故 } \int_{C_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = -2 + 2i.$$

(2) 在  $C_2: z = e^{-i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$  上,  $\sqrt{z}$  取主值支, 这时 (1) 式中  $\arg z$  代换为

$$-\theta, k=0, \text{ 则 } \int_{C_2} \frac{dz}{\sqrt{z}} = -2 - 2i.$$

3. 证明: 利用积分估值定理及三角不等式

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = \left| 1 + \frac{2}{z-1} \right| \leq 1 + \left| \frac{2}{z-1} \right| \leq 2$$

且由积分估值定理有

$$\left| \int_C \frac{z+1}{z-1} dz \right| \leq 8\pi$$

4. 证明: 因为  $f(z) = e^{i\pi}$  在单连通区域  $z$  平面上解析, 则

$$|e^{b\tau} - e^{a\tau}| = \left| \int_a^b s e^{s\tau} d\tau \right|$$

由积分估值定理有  $\left| \int_a^b s e^{s\tau} d\tau \right| \leq M|b-a|$

其中  $M$  可由  $|se^{\tau}| = |s| \cdot |e^{\tau}| = |s| \cdot |e^{(\sigma+i\tau)\tau}| = |s| \cdot e^{\sigma\tau} \cdot |e^{i\tau}| \leq |s| \cdot e^{\max(a,b)\tau}$  得出.

5. 解: 设  $z = e^{i\theta}$ ,  $C_1$  为 0 到 1 的直线段,  $C_2$  为 1 到  $z$  的圆弧, 则由柯西积分定理

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{1+z^2} &= \int_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{C_2} \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\theta \frac{ie^{i\theta}}{1+e^{2i\theta}} d\theta \\ &= RE \int_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

6. 解:  $f(z) = e^z \sin z$  在圆周  $|z| = a$  内解析, 故其积分值与路径无关, 只与起点终点

有关, 而积分路径为封闭的圆周, 故  $\int_C e^z \sin z dz = 0$

因此, 原式  $= \int_C z dz - \int_C e^z \sin z dz = \int_C z dz = 2\pi a^2$

7. 证明: 因为  $f(z)$  在  $|z| \leq 1$  上连续, 所以  $f(z)$  在  $|z| \leq 1$  一致连续, 因此  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$\exists \delta > 0$ , 使当  $1-\delta < r < 1$  时均有  $|f(e^\theta) - f(re^\theta)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ ,  $(0 < \theta < 2\pi)$

$$\begin{aligned} \text{于是: } \left| \int_{|z|=1} f(z) dz \right| &= \left| \int_{|z|=1} f(z) dz - \frac{1}{r} \int_{|z|=r} f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta - \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) r i e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| d\theta < \varepsilon \end{aligned}$$

所以  $\int_{|z|=1} f(z) dz = 0$ .

8. 证明: 首先由题设积分  $\int_{K_r} f(z) dz$  存在, 应用积分估值定理.

$$\left| \int_{K_r} f(z) dz \right| \leq M(r) \cdot 2\pi r$$

而由题设 (3)  $\lim_{r \rightarrow +\infty} M(r) \cdot r = 0$ , 故得证.

9. 证明: (1) 参见教材 (3.16) 式的证明.

因为  $f(z)$  在点  $z=0$  的邻域内连续, 则对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ ,  $\forall z \in z=0$  的邻域, 有

$$|f(z) - f(0)| < \varepsilon$$

所以  $\left| \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta - 2\pi f(0) \right| = \left| \int_0^{2\pi} (f(re^{i\theta}) - f(0)) d\theta \right|$

$$\leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(0)| d\theta < \int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta = 2\pi\varepsilon$$

故  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0)$

(2) 取 (1) 中的  $a=0$ , 再利用圆周的参数方程化简 (1) 中等式左端即证.

$$\begin{aligned} 10. \text{ 证明: } & \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} [2 \pm (z + \frac{1}{z})] f(z) \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} [\frac{2f(z)}{z} \pm f(z) \pm \frac{f(z)}{z^2}] dz \\ &= 2f(0) \pm f'(0) = 2 \pm f'(0) \end{aligned}$$

11. 证明: 由题设,  $f'(z)$  在  $D$  内含  $C$  之单连通区域内解析,

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(z) dz \right| \leq \int_a^b |f'(z)| |dz|$$

考虑到  $|f'(z)|$  在有界闭集  $C$  上的连续性, 必存在点  $\xi \in C$ , 使得  $|f'(\xi)|$  是  $|f'(z)|$  在  $C$  上的最大值.

$$\int_a^b |f'(z)| |dz| \leq \int_a^b |f'(\xi)| |b-a|$$

$$\text{由上得 } |f(b) - f(a)| \leq |f'(\xi)| |b-a|$$

如果  $\forall \eta \in C$ , 都有  $f'(\eta) = 0$ , 则沿  $C$ ,  $f'(z) = 0$ , 于是沿  $C$ ,  $f(z)$  为常数, 故

$f(b) = f(a)$ , 题中等式成立.

如果存在  $\xi \in C$  使  $f'(\xi) \neq 0$ , 且是  $|f'(z)|$  在  $C$  上的最大值, 则可令

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{f'(\xi)(b-a)}, \text{ 则题中等式成立.}$$

12. 证明: 取圆周  $|z| = \rho < 1$

由于  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内解析, 故知  $f(z)$  在  $|z| \leq \rho$  上解析, 且有

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|} = \frac{1}{1-\rho}$$

由柯西不等式, 知

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n! M(\rho)}{\rho^n} = \frac{n!}{\rho^n (1-\rho)}$$

对于  $\rho$  在  $(0, 1)$  上, 当  $\rho = \frac{n}{n+1}$  时,  $\rho^n (1-\rho)$  取最大值  $(\frac{n}{1+n})^n (1 - \frac{n}{1+n})$

于是得  $\frac{n!}{\rho^n(1-\rho)}$  的最小值为  $\frac{(n+1)!}{(\frac{n}{n+1})^n}$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时  $(\frac{n}{n+1})^n \rightarrow \frac{1}{e}$

所以有  $|f^{(n)}(0)|$  的估值为  $|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)!e$ .

13. 证明: 由柯西不等式  $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M(R)}{R^n}$ , 其中  $M(R) = \max_{|z-a|=R} |f(z)|$ ,  $n=1, 2, \dots$  可知

$$\begin{aligned} |f'(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{|f(z)|}{|z|^2} |dz| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{1}{1^2} |dz| = 1 \end{aligned}$$

14. 证明: 应用反证法

假设满足  $|z| > R$  且  $|f(z)| > M$  的  $z$  不存在, 则必存在某正数  $R, M$ , 使得对于任意的  $z$ ,  $|z| > R$  时,  $|f(z)| \leq M$ , 又由  $f(z)$  的连续性, 则当  $|z| \leq R$  时,  $f(z)$  必有最大值, 设其为  $M_1$ , 令  $M_0 = \max\{M, M_1\}$ , 则在  $|z| < \infty$  时有  $|f(z)| \leq M_0$ , 于是得到  $f(z)$  在全平面上是有界的, 则由刘维尔定理,  $f(z)$  必为常数, 与题矛盾, 假设错误.

15. 解: 由  $\mu + v = (x-y)(x^2 + 4xy + y^2) - 2(x+y)$ , 得

$$\begin{aligned} \mu_x + v_x &= (x^2 + 4xy + y^2) + (x-y)(2x+4y) - 2 \\ &= 3x^2 - 3y^2 + 6xy - 2 \end{aligned}$$

两式相加并结合  $C-R$  条件得:

$$\mu_x = 3x^2 - 3y^2 - 2$$

从而  $\mu = x^3 - 3y^2x - 2x$ ,  $v = -y^3 + 3x^2y - 2y$

故  $f = x^3 - 3y^2x - 2x + i(3x^2y - y^3 - 2y)$

16. 解: 在  $D$  内, 由条件 (1), (2) 已知满足柯西积分公式的条件, 故得在  $D$  内

$$f_1(z) = f_2(z)$$

在  $C$  上, 由条件 (3) 知  $f_1(z) = f_2(z)$

故综合得在  $\overline{D} = D + C$  上有  $f_1(z) = f_2(z)$ .

## 第四章 解析函数的幂级数表示法

### (一)

1. 解: (1) 其部分和数列

$$S_{4n} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) + i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots - \frac{1}{4n-1}\right)$$

由交错级数收敛性判别及极限运算法则知  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{4n}$  存在, 设为  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{4n} = l$ , 又有

$$a_{4n+1} = \frac{i}{4n+1} \rightarrow 0, a_{4n+2} = \frac{-1}{4n+2} \rightarrow 0, \cdots$$

由此得知  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$ , 因此级数收敛, 但非绝对收敛.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(3+5i)^n}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sqrt{34})^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!}, \text{ 可知原级数绝对收敛.}$$

$$(3) \text{ 由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1+5i}{2} \right|^n} = \left| \frac{1+5i}{2} \right| = \frac{\sqrt{26}}{2} > 1, \text{ 故原级数发散.}$$

$$2. \text{ 解: (1) } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$$(2) R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n}{n+1} = 2$$

$$(3) R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

3. 证明: (1) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lambda \neq \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |\lambda| \neq \infty$ , 则级数的收敛半径为

$$R = \begin{cases} \frac{1}{|\lambda|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| & \lambda \neq 0 \\ +\infty & \lambda = 0 \end{cases}$$

(2) 由(1)可证其收敛半径为  $R$ .

(3) 由(1)可证其收敛半径为  $R$ .

4. 证明: 因为  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R^n$  收敛, 而当  $|z| \leq R$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R^n$ , 因此级

数在  $|z| \leq R$  上绝对收敛且一致收敛.

5.解:(1)因为  $|u| < 1$  时,  $\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n$ , 所以当  $\left| \frac{a}{b} z \right| < 1$  时, 有

$$\frac{1}{az+b} = \frac{1}{b(\frac{a}{b}z+1)} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{b}z\right)^n$$

(2)因为  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $|z| < +\infty$ , 而  $e^{z^2}$  在  $z$  平面解析, 所以

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}, (|z| < +\infty)$$

逐项积分得

$$\int_0^z e^{z^2} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)} (|z| < +\infty)$$

(3)因为  $\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$

如果  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ , 则  $z=0$  为可去奇点, 可补充定义被积函数  $f(0)=1$ , 于是上式

收敛范围为  $|z| < +\infty$ , 合于逐项积分条件, 所以

$$\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} (|z| < +\infty)$$

(4)  $\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} (|z| < +\infty)$

(5)因为  $f(z) = (1-z)^{-2}$ ,  $f^{(n)}(0) = (n+1)!$

从而  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, (|z| < 1)$

6.解:因为  $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \dots$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } e^{z \ln(1+z)} &= (z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5}) + (z^2 - \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{3} - \frac{z^5}{4}) + \\ &+ (\frac{z^3}{2} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{6}) + (\frac{z^4}{6} - \frac{z^5}{12}) + \frac{z^5}{24} + \dots = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{3z^4}{40} + \dots (|z| < 1) \end{aligned}$$

7. 解: (1)  $\sin z = \sin[(z-1)+1] = \sin(z-1)\cos 1 + \cos(z-1)\sin 1$

$$\begin{aligned} &= \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-1)^{2n+1} + \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z-1)^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + 1\right) (z-1)^k, |z-1| < +\infty \end{aligned}$$

$$(2) \frac{z-1}{z+1} = \frac{z-1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}, \text{ 再由公式 } \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1)$$

$$(3) \frac{z}{z^2-2z+5} = \frac{1}{4}[(z-1)+1] \frac{1}{1+(\frac{z-1}{2})^2}, \text{ 结合 } \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1)$$

(4) 由于  $\sqrt[3]{z}$  的支点为  $0, \infty$ , 沿负实轴  $(-\infty, 0)$  割开平面, 则指定分支就在  $|z-1| < 1$

内单值解析,  $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1} \cdot [1+(z-1)]^{\frac{1}{3}}$ , 再利用二项式展开.

8. 解: (1)  $z^2(e^{z^2}-1) = z^2(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} - 1) = z^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2(n-1)}}{n!}$ , 故为 4 级零点.

$$\begin{aligned} (2) 6\sin z^3 + z^3(z^6-6) &= 6 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + z^3(z^6-6) \\ &= 6z^{15}(\frac{1}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots) \end{aligned}$$

故为 15 级零点.

9. 证明: 因为  $z_0$  为  $f(z)$  的  $m$  阶零点

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \dots$$

又因为  $z_0$  为  $g(z)$  的  $n$  阶零点,

$$g(z) = b_n(z-z_0)^n + b_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots$$

如果  $m > n$ , 则

$$f(z) + g(z) = (z - z_0)^n [b_n + b_{n+1}(z - z_0) + \cdots]$$

故  $z_0$  为  $f(z) + g(z)$  的  $n$  阶零点.

如果  $n > m$ , 同理可得  $z_0$  为  $f(z) + g(z)$  的  $m$  阶零点.

如果  $m = n$ , 当  $a_m + b_m \neq 0$  时,  $z_0$  为  $f(z) + g(z)$  的  $m$  阶零点; 当  $a_m + b_m = 0$  时,

零点  $z_0$  的阶数大于  $n$ .

$$f(z)g(z) = a_m b_n (z - z_0)^{m+n} + (a_{m+1} b_n + a_m b_{n+1})(z - z_0)^{m+n+1} + \cdots$$

故  $z_0$  为  $f(z)g(z)$  的  $m+n$  阶零点.

$$\frac{g(z)}{f(z)} = (z - z_0)^{n-m} \frac{b_n + b_{n+1}(z - z_0) + \cdots}{a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \cdots}$$

由此可见

如果  $n > m$ , 则  $z_0$  为  $f(z)/g(z)$  的  $n-m$  阶零点,

如果  $m > n$ , 则  $z_0$  为  $f(z)/g(z)$  的  $m-n$  阶零点,

如果  $m = n$ , 则  $z_0$  为  $f(z)/g(z)$  的可去奇点.

10. 证明: 利用定理 4.17, 因  $z_0$  为解析函数  $f(z)$  的至少  $n$  级零点, 则有

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad m \geq n$$

$$\text{其中 } g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0.$$

同理  $\varphi(z) = (z - z_0)^n \varphi(z_0)$ , 其中  $\varphi(z_0) = \frac{\varphi^n(z_0)}{n!} \neq 0$ , 则本题得证.

11. 解: (1) 不存在

(2) 不存在

(3) 不存在

(4) 存在

12. 证明: 因为  $f(z)$  在  $z_0$  点解析, 由泰勒定理

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (z \in K : |z - z_0| < R, K \subset D)$$

再由题设  $f^{(n)}(z_0) = 0, n = 1, 2, \dots$ , 则  $f(z) = f(z_0), (z \in K \subset D)$

由唯一性定理得  $f(z) \equiv f(z_0), (z \in D)$ .

13. 证明: (反证法) 假设  $|f(z_0)|$  是  $|f(z)|$  在  $D$  内的最小值, 因  $f(z_0) \neq 0$ , 则  $\frac{1}{|f(z_0)|}$  是

$\frac{1}{|f(z)|}$  在  $D$  内的最大值,  $f(z)$  为解析函数, 由最大模原理,  $\frac{1}{f(z)}$  在  $D$  内恒为常

数, 与题设矛盾, 故  $|f(z_0)|$  不可能是  $|f(z)|$  在  $D$  内的最小值.

14. 证明: (反证法) 设  $f(z)$  在  $D$  内处处不为零, 则由最小, 最大模原理, 在  $D$  内  $|f(z)|$

既不能达到最小值, 也不能达到最大值.

而题设  $|f(z)|$  在闭域  $\bar{D}$  上连续, 故  $|f(z)|$  在闭域  $\bar{D}$  上有最大值  $M$  和最小值  $m$ ,

而由上所述, 这些都只能在边界  $C$  上达到, 但题设  $|f(z)|$  在  $C$  上为常数, 故

$$M = |f(z)| = m \quad z \in C$$

再由最大, 最小模原理,  $m < |f(z)| < M = m \quad z \in D$ , 即

$$|f(z)| = m \quad z \in D$$

由上,  $|f(z)|$  在闭域  $\bar{D}$  上恒为常数, 由第二章习题(一)6(3)知,  $f(z)$  在  $D$  内必为

常数, 矛盾.

## (二)

1. 证明: 由于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  收敛于  $f(z)$ , 故  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ , 当  $n > N$  及一切  $z \in E$ , 有

$$|s_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{M}. \text{ 由题设 } |g(z)| < M, (M < +\infty) \text{ 推得}$$

$$|s_n(z)g(z) - f(z)g(z)| < \varepsilon$$

故得证.

2. 证明: 该级数的部分和  $s_n(z) = z + (z^2 - z) + \cdots + (z^n - z^{n-1}) = z^n$

显然, 对任何  $z (|z| < 1)$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = 0$ .

另一方面, 对于任何固定的  $n$ , 取  $z = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} < 1$ , 有  $|z|^n = \frac{1}{2}$ , 因而  $|z|^n$  不可能任意小,

这就证得级数在圆  $|z| < 1$  内非一致收敛.

3. 证明: (1)  $|\sigma_n| = |v_1 + v_2 + \cdots + v_n| \leq |v_1| + \cdots + |v_n|$ , 两边取极限

$$|\delta| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| \leq |v_1| + \cdots + |v_n| + \cdots$$

$$(2) |e^z - 1| = \left| z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \right| \leq |z| + \left| \frac{z^2}{2!} \right| + \cdots + \left| \frac{z^n}{n!} \right| + \cdots = e^{|z|} - 1$$

$$e^{|z|} - 1 = |z| + \left| \frac{z^2}{2!} \right| + \cdots + \left| \frac{z^n}{n!} \right| + \cdots \leq |z| \left( 1 + \frac{|z|}{2!} + \cdots + \frac{|z|^{n-1}}{n!} + \cdots \right)$$

$$\leq |z| \left( 1 + |z| + \cdots + \frac{|z|^n}{n!} + \cdots \right) = |z| e^{|z|}$$

$$(3) \text{ 因为在 } 0 < |z| < 1 \text{ 内任意一点 } z, e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\text{所以 } |e^z - 1| \leq |z| + \frac{|z|^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{|z|^3}{1 - \frac{|z|}{3}} \leq |z| \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{4} |z|$$

$$\text{另一方面: } |e^z - 1| \geq |z| + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{|z|^3}{1 - \frac{|z|}{3}} \geq |z| - \frac{|z|}{2} - \frac{|z|}{4} = \frac{1}{4} |z|$$

4. 证明: 由柯西不等式  $|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$ , 当  $|z| < \rho$  时,

$$|f(z) - a_0| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z| \leq M \frac{|z|}{\rho - |z|},$$

因此  $|f(z)| = |f(z) - a_0 + a_0| \leq |a_0| + |f(z) - a_0|$

$$\geq |a_0| - M \frac{|z|}{\rho - |z|} > |a_0| - M \frac{\frac{|a_0|}{|a_0|+M} \rho}{\rho - \frac{|a_0|}{|a_0|+M} \rho}$$

$$= |a_0| - |a_0| = 0$$

故  $f(z)$  在  $|z| < \frac{|a_0| \rho}{|a_0|+M}$  上无零点.

5. 证明: 因为  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cdot \overline{f(re^{i\theta})} d\theta$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta} \right) d\theta$$

对任意自然数  $m, k$  若  $m \neq k$ , 则

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \cdot e^{-im\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)\theta} d\theta = \frac{1}{(k-m)i} e^{i(k-m)\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

因此, 根据逐项可积公式即得:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |a_n|^2 r^{2n} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

6. 证明: 取  $r > R$ , 则对一切正整数  $k > n$  时,

$$|f^{(k)}(0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{k+1}} \right| dz \leq \frac{k! M r^n}{r^k}$$

于是由  $r$  的任意性知对一切  $k > n$  均有  $f^{(k)}(0) = 0$

故  $f(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ , 即  $f(z)$  是一个至多  $n$  次的多项式或常数.

7. 证明: (1) 设  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶零点, 于是在  $z_0$  的某邻域  $K$  内

$$f(z) = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \cdots \quad (c_m \neq 0)$$

取  $\delta', (0 < \delta' < \delta)$ , 于是在区域  $N'(z_0, \delta')$  内

$$f(z) = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \cdots \quad (c_m \neq 0)$$

一致收敛,逐项积分可得

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta &= \int_{z_0}^z [c_m(\zeta - z_0)^m + c_{m+1}(\zeta - z_0)^{m+1} + \cdots] d\zeta \\&= \int_{z_0}^z c_m(\zeta - z_0)^m d\zeta + \int_{z_0}^z c_{m+1}(\zeta - z_0)^{m+1} d\zeta + \cdots \\&= \frac{c_m}{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \frac{c_{m+1}}{m+2}(z - z_0)^{m+2} + \cdots\end{aligned}$$

$$\text{令 } F(z) = \frac{c_m}{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \frac{c_{m+1}}{m+2}(z - z_0)^{m+2} + \cdots$$

故  $z_0$  是  $F(z)$  的  $m+1$  阶零点.

(2) 设  $\varphi(z) = \int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta$ , 作函数

$$F(z) = \varphi(z) - \int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta, \text{ 则}$$

$$F(z) = \int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta - \int_{z_1}^{z_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

由(1)知  $z_0$  是  $F(z)$  的  $m+1$  阶零点, 故

$\varphi(z) - \int_{z_1}^{z_0} f(\zeta) d\zeta$  以  $z_0$  为  $m+1$  阶零点.

8. 证明: 设  $f_1(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$f_2(z) = u(x, 0) + iv(x, 0)$$

依唯一性定理, 在  $L$  上有  $f(z) = f_1(z)$ , 而  $L$  每一点都是  $L$  的极限点, 而且

$L \subset G$ ,  $f_1(z), f_2(z)$  都在  $G$  内解析, 由唯一性定理有  $f_1(z) = f_2(z)$ .

9. 证明: (反证法) 设存在这样的周线  $C$ ,  $\overline{I(C)} \subset D$ , 且有一复数  $A$ , 使得  $f(z) = A$ , 在

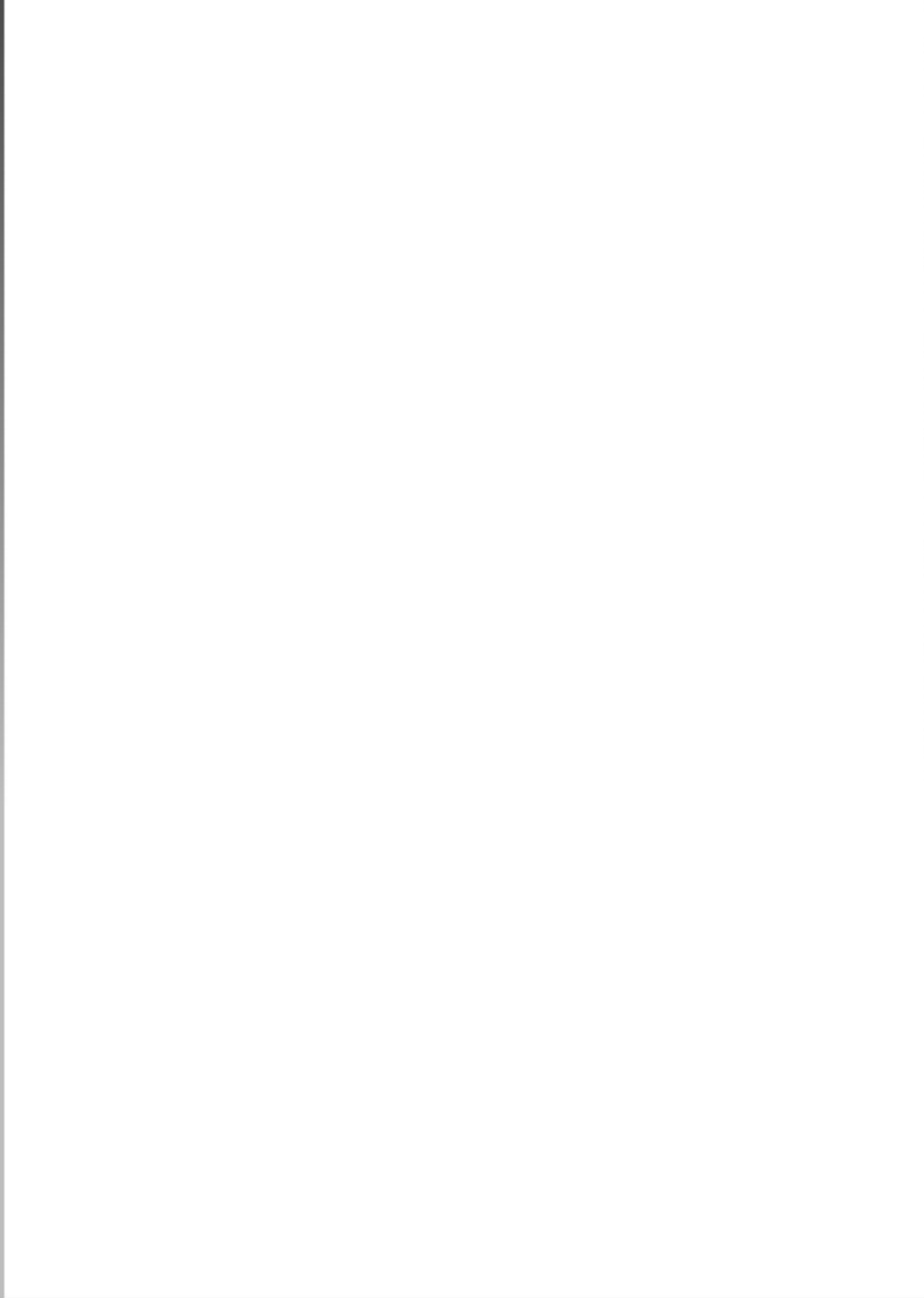
$C$  内部  $I(C)$  有无穷多个根, 即  $f(z) - A = 0$  在  $C$  内部  $I(C)$  有无穷多个零点, 必存

在零点列  $\{z_n\} \rightarrow z_0 \in D$ , 从而由唯一性定理,  $f(z) \equiv A (z \in D)$ , 与题设矛盾.

10. 证明: 由最大模原理  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ , 显然  $M(r)$  是单调上升函数, 若存在

$r_1 < r_2$ , 使得  $M(r_1) = M(r_2)$ , 即在  $|z| < r_2$  内存在点  $z_1 = r_1 e^{i\theta}$  使得  $|f(z_1)| = M(r_2)$ ,

即在内点达到最大模, 由最大模原理知  $f(z)$  恒为常数.



## 第五章 解析函数的洛朗展开与孤立奇点

### (一)

$$1. \text{解: (1): } 0 < |z| < 1, \frac{z+1}{z^2(z-1)} = \frac{z+1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$2) 1 < |z| < +\infty \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < 1, \frac{z+1}{z^2(z-1)} = \frac{z+1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+3}}$$

$$(2) f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1} = \frac{-1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{2}{z^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{z^{n+2}}$$

$$(3) f(z) = \frac{e^z}{z(1+z^2)} = \frac{1+z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^n}{n!}+\dots}{z+z^3}$$

$$= \frac{1}{z} + 1 - \frac{z}{2} - \frac{5}{6} z^2 \dots$$

$$2. \text{解: (1)} \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{-1}{4(z-i)^2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n \right]^2$$

$$= \frac{-1}{4(z-i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n \quad (0 < |z-i| < 2)$$

$$(2) z^2 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n+2} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{z^n} \quad (0 < |z| < +\infty)$$

$$(3) \text{ 令 } \xi = \frac{1}{z}, \text{ 则 } e^{\frac{1}{1-z}} = e^{\frac{\xi}{\xi-1}} = e^{-\xi(1+\xi+\frac{\xi^2}{2}+\dots)}$$

$$= (1-\xi + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^4}{4!} - \frac{\xi^5}{5!} \dots) (1-\xi^2 + \frac{\xi^4}{2} \dots)$$

$$(1-\frac{\xi^3}{2} \dots) (1-\frac{\xi^4}{3!} \dots) (1-\frac{\xi^5}{4!} \dots)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \xi - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} - \frac{11\xi^4}{8} + \frac{4\xi^5}{5} \dots \\
&= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \frac{11}{8} \frac{1}{z^4} - \frac{4}{5z^5} + \dots
\end{aligned}$$

3. 证明: 根据洛朗定理, 可设

$$\sin\left[t\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (0 < |z| < +\infty)$$

$$\text{其中 } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\sin\left[t\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\right]}{\xi^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

$$\text{这里 } |\xi| = 1, \xi = e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$\text{于是 } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\sin[t(e^{i\theta} + e^{-i\theta})]}{e^{i(n+1)\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2 + \cos \theta)}{e^{in\theta}} d\theta$$

4. 解: (1) 因为函数为有理函数, 且分子, 分母无公共零点, 因此分母的零点就是函数的

极点, 令分母  $z(z^2 + 4) = 0$ , 得  $z = 0$  以及  $\pm 2i$ , 分别是分母的一级和二级零点,

从而分别是函数的一级和二级极点, 又因  $\frac{z-1}{z(z^2+4)} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ , 所以  $z = \infty$  为可去

奇点.

(2) 由定理 5.4(3) 知函数  $\sin z + \cos z$  的  $m$  级零点, 就是  $\frac{1}{\sin z + \cos z}$  的  $m$  级极点,

且分母零点的极限点必为函数的极限点, 因为

$$\sin \pi + \cos \pi = \sqrt{2} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{则令 } \sin z + \cos z = 0, \text{ 得 } z = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

$$\text{且又因 } \left[\sqrt{2} \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right)\right]' \Big|_{z=k\pi-\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cos k\pi = \sqrt{2}(-1)^k \neq 0 \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

故  $z = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$  各为分母  $\sin z + \cos z$  的一级零点即为  $\frac{1}{\sin z + \cos z}$  的

一级极点.

又因  $z = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow \infty$ , 即  $z = \infty$  是极点的极限点, 即为函数的非孤立奇点.

(3) 因  $z = (2k+1)\pi i$  时, 分母  $1 + e^z = 0$ , 且

$$(1 + e^z)' \Big|_{z=(2k+1)\pi i} = -1 \neq 0$$

所以  $z = (2k+1)\pi i$  是分母的一级零点, 而此时分子

$$(1 - e^z) \Big|_{z=(2k+1)\pi i} \neq 0$$

故  $z = (2k+1)\pi i$  各为函数的一级极点, 因分母, 分子在平面解析, 所以除此之外在平面上无其他奇点.

(4) 令分母为 0, 解得  $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ , 即为所给函数的极点.

且因  $[(z^2 + i)^3]' \Big|_{z=\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)} = 0, [(z^2 + i)^3]' \Big|_{z=\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)} \neq 0,$

故  $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$  均为所给函数的三级极点.

又因  $\frac{1}{(z^2 + 1)^3} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ , 所以  $z = \infty$  为可去奇点.

(5) 因为  $\tan^2 z = \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}$ , 分子分母均在  $z$  平面解析且无公共零点, 所以分母的零

点即为  $\tan^2 z$  的极点, 令  $\cos^2 z = 0$ , 解得

$$z = k\pi + \frac{\pi}{2}, (\cos^2 z)' \Big|_{z=k\pi + \frac{\pi}{2}} = 0$$

$$(\cos^2 z)'' \Big|_{z=k\pi + \frac{\pi}{2}} \neq 0 \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

所以  $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$  是  $\cos^2 z$  的二级零点, 从而是  $\tan^2 z$  的二级极点.

$$(6) \cos \frac{1}{z+i} = 1 - \frac{1}{2!(z+i)^2} + \dots$$

所以  $z = -i$  为其本性奇点,

又因  $\lim_{z \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{z+i} = 1$ , 所以  $z = \infty$  为可去奇点.

$$(7) \text{ 因 } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{z}{2}}{2(\frac{z}{2})^2} = \frac{1}{2}$$

故  $z=0$  为可去奇点,  $z=\infty$  为本性奇点.

(8) 因为当且仅当  $z=2k\pi$  时, 分母  $e^z - 1 = 0$ ,  $(e^z - 1)' \Big|_{z=2k\pi} \neq 0$ , 所以  $z=2k\pi$  为

分母的一级零点, 而分子是常数 1, 因此  $z=2k\pi$  为其一级奇点.

5. 解: 先判断各函数的奇点类型.

(1)  $z=0, z=\infty$  为奇点.

(2)  $z=0, z=\infty$  为奇点.

(3)  $z=0$  不是孤立奇点, 是极点的极限点.

(4) 分母的零点是  $z=k\pi$ , 这是  $\operatorname{ctg} z$  的极点, 且  $(\sin z)' \Big|_{k\pi} = -1 \neq 0$

所以  $z=k\pi$  是分母的一级零点, 因此是  $\operatorname{ctg} z$  的一极点, 而  $z=\infty$  不是孤立奇点, 是极点的极限点.

由三个函数均为单值函数, 由洛朗定理, 在孤立奇点的去心邻域内均能展开成洛

朗级数, 在非孤立奇点的邻域内则不能.

6. 解: (1) 当  $m \neq n$  时,  $a$  为  $f(z) + g(z)$  的  $\max(m, n)$  级极点, 为

$f, g$  的  $m+n$  级极点, 为  $\frac{f}{g}$  的  $m-n$  ( $m > n$ ) 级极点与  $n-m$  ( $m < n$ ) 级零点

(2) 当  $m=n$  时,  $a$  为  $f+g$  的至多  $m$  级极点 (此时各种情况均有可能产生)

例:  $f = \frac{1}{(z-a)^m} + z^k, g = \frac{-1}{(z-a)^m} + z^k (k \in \mathbb{N}^+)$

$a$  为  $f, g$  的  $m+n$  级极点, 为  $\frac{f}{g}$  的可去奇点.

7. 证明: 因  $f(z)$  不恒等于零, 如果  $z=a$  为  $f(z)$  的零点,  $z=a$  只能为  $f(z)$  的孤立奇点.

(反证)如果  $z=a$  不是  $\varphi(z) \pm f(z), \varphi(z) \cdot f(z), \varphi(z)/f(z)$  的本性奇点,则由上题的结论知,  $\varphi(z)$  就以  $z=a$  为可去奇点或极点,矛盾.

8.解:(1)  $f(z) = \frac{z+1-e^z}{z(e^z-1)}$ , 奇点为  $z=0$  为一级极点,

$z=2k\pi i (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$  为一级极点,  $z=\infty$  为非孤立奇点

(2)  $z=0$  为函数的本性奇点,

$z=\infty$  为函数的本性奇点.

(3)  $z=\infty$  是可去奇点,

$z=0$  为本性奇点.

(4)  $z=0, z=\infty$  为本性奇点.

(5)  $z=1$  为本性奇点,

$z=2k\pi i$  为一级极点,

$z=\infty$  为非孤立奇点.

9.证明:因  $f(z)$  在  $z$  平面上解析,则  $f(z)$  必为整函数,而整函数只以  $z=\infty$  点为孤立奇点,而  $f(z)$  在  $z=\infty$  点解析,故  $z=\infty$  点只能是  $f(z)$  的可去奇点,由定理 5.10 知,  $f(z)$  为常数.

10.证明:(反证)设  $w=f(z)$  为整函数且非常数,若值全含于一圆之外,即存在

$w_0, \varepsilon_0 > 0$ , 使得对任何  $z$ , 恒有  $|f(z)-w_0| > \varepsilon_0$ , 则有非常数整函数

$g(z) = \frac{1}{f(z)-w_0}$ , 所以在  $z$  平面上任何点  $z$ , 分母不等于 0, 从而  $g(z)$  在  $z$  平面上

解析,即为整函数.又因  $f(z)$  非常数,所以  $g(z)$  非常数,其值全含于一圆

$|g(z)| < \frac{1}{\varepsilon_0}$  之内,与刘维尔定理矛盾.

11.证明:由题意,  $f(z)$  在  $z_0$  的去心邻域内的洛朗展开式可设为

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (c_{-1} \neq 0)$$

令  $g(z) = f(z) - \frac{c_{-1}}{z - z_0}$ , 因  $f(z), \frac{c_{-1}}{z - z_0}$  在  $|z| \leq r$  上除去  $z_0$  外解析, 所以  $g(z)$  在

$|z| \leq r$  上除去  $z_0$  外解析. 又可知  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  在  $z_0$  的邻域内解析, 故

$g(z)$  在  $|z| \leq r$  上解析.

函数  $g(z)$  在  $|z| < r$  内的泰勒展开式为  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + c_{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{n+1}} z^n$

而直接法又给出  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

$$\text{从而 } \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0 \left[ \frac{b_n z_0^n - \frac{c_{-1}}{z_0}}{b_{n+1} z_0^{n+1} - \frac{c_{-1}}{z_0}} \right]$$

因为  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  在  $|z| \leq r$  上解析, 所以当  $z = z_0$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n$  是收敛的, 一

般项  $b_n z_0^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 故即知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0$ .

## (二)

1. 解: (1) 不能

(2) 能, 指定点不是所给函数的支点

(3) 不能

(4) 不能

(5) 能, 指定点不是所给函数的支点

2. 解: 不正确. 因为  $f(z)$  在  $z=1$  处的去心邻域应是  $0 < |z-1| < 1$ , 而  $1 < |z-1| < +\infty$

正好是以 1 为中心的无穷远点的去心邻域. 所以根据题中的洛朗展式, 只能判

定  $z = \infty$  是  $f(z)$  的可去奇点。

3. 证明：由孤立奇点的定义，又有  $f(z)$  在点  $a$  解析，故知  $a$  为  $g(z)$  的孤立奇点，

且  $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) = g(a)$ ，故  $a$  为  $g(z)$  的可去奇点。故在  $a$  业解析。

4. 证明：本题为第 3 题的特例。

5. 证明：由定理 5.4 的条件 (2)  $f(z) = \frac{\lambda(z)}{(z-a)^m}$ ，其中  $\lambda(z)$  在点  $a$  邻域内解析，

且  $\lambda(a) \neq 0$  为  $f(z)$  以  $a$  为  $m$  阶极点的特征，则

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m \frac{\lambda(z)}{(z-a)^m} = \lambda(a) = \alpha \neq 0$$

6. 证明：令  $g(z) = (z-a)^k f(z)$ 。由题设， $g(z)$  在  $k - \{a\} : 0 < |z-a| < R$  内有界。由

定理 5.3 (3)， $a$  为  $g(z)$  的可去奇点，则  $a$  为  $g(z)$  的解析点。又由定理 5.4 (2)，

若  $a$  为  $f(z)$  的  $m$  级极点，则在点  $a$  的某去心邻域内能表成  $f(z) = \frac{\lambda(z)}{(z-a)^m}$ ，其

中  $\lambda(z)$  在点  $a$  邻域内解析，且  $\lambda(a) \neq 0$ 。若  $m > k$ ，则  $g(z)$  以  $a$  为  $m-k$  级极点，

与  $a$  为  $g(z)$  的可去奇点矛盾，故  $m \leq k$ 。另一方面若  $a$  为  $f(z)$  的可去奇点，则

$g(z)$  在  $a$  点仍解析。故题目也成立，综合有  $a$  为  $f(z)$  的不高于  $k$  级的极点或可

去奇点。

7. 解：令  $w = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ ，即  $f(z) = \sin w$ ，由于  $\sin w$  只有唯一的奇点即本性奇点  $w = \infty$ ，

与之对应的是  $\sin \frac{1}{z}$  的零点，即  $z = \frac{1}{k\pi} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$  与  $z = \infty$  于是它们都是  $f(z)$  的本性奇点。

$z = 0$  是  $f(z)$  的本性奇点列  $\{\frac{1}{k\pi}\}$  的极限点，是个非孤立奇点。

8. 证明：(必要性) 由于  $f(z)$  在扩充  $z$  平面上只有一个一级极点，

当  $z = \infty$  为极点时,  $f(z) = az + b$

当  $z_0 \neq \infty$  为极点时,  $f(z) = \frac{A}{z - z_0} + B (A \neq 0)$

$$= \frac{Bz + (A - Bz_0)}{z - z_0}$$

$$-Bz_0 - (A - Bz_0) = -A \neq 0$$

(充分性) 若  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0$

因而  $a, c$  不同时为 0, ①  $c \neq 0$ ,  $f(z)$  只有一个一级极点  $z = -\frac{d}{c}$

②  $c = 0$ , 则  $a \neq 0$  且  $d \neq 0$ ,  $f(z)$  只有一个一级极点  $z = \infty$

9. 证明: 因  $f(z)$  在点  $\infty$  解析,  $\infty$  就为可去奇点, 构造圆周  $\Gamma: |z| = R$  这里  $R$  充分大,

使  $C$  及其内部全含于  $\Gamma$ , 则得到点  $\infty$  的去心邻域:  $0 < R < |z| < +\infty$ , 则  $f(z)$  在其

内部可展成洛朗级数, 设为  $f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots$  ( $c_0$  可为 0)

由定理 5.2 知  $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz$  即  $-c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} f(z) dz$

故由复周线的柯西积分定理可知  $-c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$

10. 证明:  $\because \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = C_0 \neq \infty$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists R > 0$ , 当  $|z| > R$  时均有  $|f(z) - C_0| < \varepsilon$

选取充分大的  $r > R$ , 使得  $C$  在  $|\xi| = r$  内部

$$\begin{aligned} & \text{由于 } \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - C_0 \right| \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left| \int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{|\xi|=r} \frac{C_0}{\xi - z} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=r} \frac{|f(\xi) - C_0|}{|\xi - z|} |d\xi| \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon \frac{r}{r-|z|} < \varepsilon$$

$$\text{故 } \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = C_0$$

$$\textcircled{1} z \notin D, \text{ 则 } \int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi + \int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = 0$$

$$\text{故 } \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = 0 - C_0$$

②  $z \in D$ , 亦可选取充分大的  $r_0 > r$ , 使得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_0} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = f(z)$$

$$\text{从而 } \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = f(z) - C_0$$

11. 证明: 由于函数  $f(z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{49} (z-2k)}$  在含点  $\infty$  的无界闭域  $|z| \geq 99$  上解析且

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 = f(\infty)$ , 于是应用上题计算积分

$$I = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(z)}{z-100} dz = -f(100) = \frac{-1}{\prod_{k=1}^{49} (100-2k)} = -\frac{1}{98!!}$$

12. 证明: 先考察在充分大的圆周  $\Gamma: |z| = R$  内, 令除  $z = \infty$  外,  $f(z)$  的一切有限奇点都全含于的  $\Gamma$  内部, 此时,  $f(z)$  在  $\Gamma$  内部的奇点个数只能有限, 否则无限多个奇点必有一个聚点, 此时, 它当然为非孤立奇点, 矛盾。故在  $C$  上, 从而在  $C_\infty$  上命题亦成立。

13. 证明: 有两种可能的情况。

1)  $f(z)$  有  $n$  个一级极点, 且都不为 0, 设为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 此时  $\infty$  为  $f(z)$  的可去

奇点。由定理 5.4 (2) 写出  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}$ , 其中  $\varphi(z)$  在  $z$  平面

上解析且不恒等于 0, 因为  $\infty$  此时不是  $f(z)$  的极点, 故  $\varphi(z)$  展式中  $z$  的最高次幂不能大于  $n$ , 即  $\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ,  $\varphi(d_k) \neq 0$ , 所以

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)}$$
, 其中  $\alpha_k$  互异, 且  $\alpha_k (k = 0, 1, \cdots, n)$  至少有一个不为 0.

2)  $\infty$  为  $f(z)$  的一级极点, 若  $\alpha_k (k = 1, 2, \cdots, n)$  只有一个为  $\infty$ , 把其余  $n-1$  个依次

排列为  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ , 利用定理 5.4' (2) 得  $f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{n-1})}$ ,

其中  $\alpha_n \neq 0$ , 且当  $i \neq j$  时,  $\alpha_i \neq \alpha_j (1 \leq i, j \leq n-1)$ 。

14. 证明: 记  $I(C) = D$

1) 设在区域  $D$  中去掉所有的极点, 得一区域  $D_1$ , 由题设知, 在  $D_1$  内  $f(z) \neq 0$ 。

(反证法) 若  $f(z)$  在  $D_1$  内有无限多个零点, 亦即在  $D$  内有无限多个零点, 那么我们不妨取出其中彼此不同的零点组成一个点列  $\{z_n\}$ , 它是有界的, 因而有一收敛子列  $\{z_{n_k}\} \rightarrow z_0$ , 本题设  $z_0$  只能在  $D_1$  内, 又由唯一性定理, 在  $D_1$  内  $f(z) \equiv 0$ , 矛盾, 于是  $f(z)$  在  $D$  内至多只有有限个零点。

2) 考察  $\frac{1}{f(z)}$ 。满足题设条件, 由 1) 知  $\frac{1}{f(z)}$  在  $D$  内至多只有有限个极点。

15. 证明: 由题设条件可设  $f(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots = z^\lambda (c_\lambda + c_{\lambda+1} z + \cdots)$ ,

$c_\lambda = \frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} \neq 0$ , 又令  $\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^\lambda} & z \neq 0 \\ \frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} & z = 0 \end{cases}$  再应用最大模原理。

16. 证明:

令  $z$  是圆  $|z| < R$  内任一点,  $r$  满足。由最大模原理知  $|\varphi(z)| \leq |\varphi(\xi)| (|\xi| = r)$ , 即

$|\varphi(z)| \leq \frac{f(\xi)}{\xi^\lambda} \leq \frac{M}{r}$ , 令  $r \rightarrow R$ , 则  $|\varphi(z)| = \frac{f(z)}{z^\lambda} \leq \frac{M}{R} (*)$

特别  $|\varphi(0)| \leq |f'(0)| \leq \frac{M}{R}$  即  $|f(z)| \leq \frac{M}{R} |z| (|z| < R)$ 。

若圆  $|z| < R$  内有一点  $z_1$ , 使  $|f(z)| = \frac{M}{R} |z|, (0 < |z| < R)$ , 即  $|\varphi(z)| = \frac{f(z)}{z} = \frac{M}{R}$ , 这

说明在式( \*) 中, 等号在圆  $|z| < R$  内某一点达到。由最大模原理知  $|\varphi(z)| = c = \frac{M}{R}$ ,

所以  $f(z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha} z$  ( $\alpha$  为实数)。

## 第六章 留数理论及其应用

### (一)

1. 解: (1)  $z=1$  是一级极点, 故由推论 6.3 知

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = (z-1) \frac{1}{(z-1)(z+1)^2} \Big|_{z=1} = \frac{1}{4}$$

$z=-1$  是二级极点, 同前由推论 6.4 知

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = [(z+1)^2 \frac{1}{(z-1)(z+1)^2}]' \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{4}$$

$z=\infty$  是可去奇点, 则由教材(6.2)式知  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -[\operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-1} f(z)] = 0$

(2) 因  $z=n\pi (n=0, \pm 1, \dots)$  为分母  $\sin z$  的一级零点, 知  $z=n\pi (n=0, \pm 1, \dots)$  为  $\frac{1}{\sin z}$  的

一级极点, 故由定理 6.5 知

$$\operatorname{Res}_{z=n\pi} f(z) = \frac{1}{(\sin z)'} \Big|_{z=n\pi} = (-1)^n$$

(3) 由  $\frac{1-e^{2z}}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left( -2z - \frac{(2z)^2}{2!} - \frac{(2z)^3}{3!} - \dots \right) = -\frac{2}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \frac{4}{3z} - \dots$  所以

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = -\frac{4}{3}$$

又由  $z=0$  是唯一有限奇点, 故  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{4}{3}$

(4) 由  $e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \dots$  所以  $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 1$

又因  $z=1$  是唯一的有限奇点, 所以  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = -1$

(5) 因  $z=1$  为  $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$  的  $n$  级极点, 所以

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{z^{2n}}{(z-1)^n} = (z^{2n})^{(n-1)} \Big|_{z=1} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{z^{2n}}{(z-1)^n} = -\operatorname{Res}_{z=1} \frac{z^{2n}}{(z-1)^n} = -\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$(6) \operatorname{Res}_{z=1} \frac{e^z}{z^2-1} = (z-1) \cdot \frac{e^z}{z^2-1} \Big|_{z=1} = \frac{e}{2}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{e^z}{z^2-1} = (z+1) \cdot \frac{e^z}{z^2-1} \Big|_{z=-1} = \frac{e^{-1}}{2} \quad \operatorname{Res}_{z=1} \frac{e^z}{z^2-1} = (z-1) \cdot \frac{e^z}{z^2-1} \Big|_{z=1} = \frac{e}{2}$$

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{e^z}{z^2-1} = -(\operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-1} f(z)) = \frac{e^{-1} - e}{2}$$

2. 解(1) 函数  $z^m \sin \frac{1}{z}$  仅有两个孤立奇点  $z=0$  和无穷, 因

$$z^m \sin \frac{1}{z} = z^m \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!z^{2k+1}} \right) (k=0,1,2,\cdots)$$

当  $m$  为奇数时, 洛朗展式不含  $\frac{1}{z}$  的项, 故

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0, \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$$

当  $m$  为偶数时, 洛朗展式中含  $\frac{1}{z}$  的项的系数为  $\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ , 故

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}$$

(3)  $z=\infty$  是  $\frac{z^{2m}}{1+z^m}$  的  $m$  级极点, 令分母  $1+z^m=0$  的  $z^m=-1=e^{i\pi(2k+1)}$

$$\text{因此 } z_k = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{m}} = e_k (k=0,1,\cdots,m-1)$$

且  $(1+z^m)' \Big|_{z=e^k} \neq 0$ , 因此  $e_k$  是题设  $f(z)$  的一级极点,

$$\operatorname{Res}_{z=e_k} f(z) = \frac{z^{2m}}{(1+z^m)'} \Big|_{z=e_k} = \frac{e_k^{m+1}}{m} = \frac{e_k}{m} e^{i\pi(2k+1)} = -\frac{e_k}{m}$$

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{k=0}^{m-1} \left( -\frac{e_k}{m} \right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{e_k}{m}$$

(3) 孤立奇点为  $z=\alpha, \beta, \infty$

$$\operatorname{Res}_{z=\beta} f(z) = \frac{2}{(z-\alpha)^m} \Big|_{z=\beta} = \frac{2}{(\beta-\alpha)^m}$$

由于  $z=\infty$  至少是二级极点, 因此  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$

由此又

(4)  $f(z)$  以  $z=0$  为二级极点,  $z=\pi i$  为四级,  $z=\infty$  为本性极点

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{\pi-4i}{\pi^5} \quad \operatorname{Res}_{z=\pi i} f(z) = \frac{1}{3!} \left[ \frac{e^z}{z^2} \right]_{z=\pi i}^{(3)} = \frac{\pi^3+6\pi^2 i-18\pi-24i}{6\pi^5}$$

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -[\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\pi i} f(z)] = -\frac{\pi^3+6\pi^2 i-12\pi-48i}{6\pi^5}$$

3. 解

(1) 奇点  $z=n\pi (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  但在单位圆  $|z|=1$  内

内只含有唯一二级极点  $z=0$ , 在  $0 < |z| < +\infty$  内有

$$\frac{1}{z \sin z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + \frac{7z^3}{360} + \dots \text{ 不含有 } \frac{1}{z}, \text{ 所以}$$

$$\text{故由残数定理得 } \int_{|z|=1} \frac{dz}{z \sin z} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z \sin z} = 0$$

$$(2) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{1+z^2} = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i [\operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-1} f(z)] \frac{e^i - e^{-i}}{2i} = \sin 1$$

$$4. (1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$$

$$\text{故 } \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \sqrt{3} \cos x)^2} = \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(2 + \sqrt{3} \frac{z+z^{-1}}{2})^2} = \frac{4}{3i} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(z^2 + \frac{4}{\sqrt{3}} z + 1)^2} \text{ 因此由留数}$$

定理原积分 =  $4\pi$

5. (1) 原式 =  $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ , 由定理 6.7 知

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$$

(2) 由于  $\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2} = 0$  因此

$$\text{原式} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ai} \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a}$$

6. (1)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx$  存在, 且

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx \\ &= \frac{1}{2} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx \end{aligned}$$

(2)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)^2} dx$  存在, 且  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)^2} dx$

7. 由柯西积分定理

$$\begin{aligned} C &= \int_c \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} dz \\ &= \int_r^R \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} dx + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} dz + \int_R^r \frac{e^{-y}}{\sqrt{yi}} dy \end{aligned}$$

(1) 应用引例 6.4, 得到  $\lim_{z \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} dz = 0$

(2)  $|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} dz| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{R}} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0$  带入原式化简即得

8 应用残数定理

$$\begin{aligned} 2\pi i \left( \frac{\pi}{2} - i \right) &= \int_C \frac{\sqrt{z} \ln z}{(1+z)^2} dz \\ &= \int_r^R \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1+x)^2} dx + \int_{C_R} \frac{\sqrt{z} \ln z}{(1+z)^2} dz + \int_{C_r} \frac{\sqrt{z} \ln z}{(1+z)^2} dz \end{aligned}$$

有引理 6.1 及 634 得证

10. 证明：令  $f(z) = -z, \varphi(z) = e^{z-\lambda}$ , 显然他们在

$|z| \leq 1$  解析, 在单位圆周  $|z|=1$  上  $|\varphi(z)| = e^x |e^{i\pi}| = e^x = |f(z)|$

由儒歇定理知, 在  $|z| < 1$  内  $f(z) + \varphi(z) = e^{z-\lambda} - z$  与  $f(z) = -z$  有相同的零点个数,

又因为  $F(x) = e^{x-\lambda} - x$  连续与  $[0, 1]$ , 且

$$F(0) = e^{-\lambda} > 0, F(1) = e^{1-\lambda} - 1 < 0,$$

故  $e^{z-\lambda} = z$  的根在  $(0, 1)$  内, 且为正实数。

11. 在  $|z|=1$  上有  $|e^z| = e^x \leq e < e^\lambda = |e^\lambda z^n|$ , 故有儒歇定理知

有同样多的零点, 而  $-e^\lambda z^n$  在  $|z| < 1$  内有只有  $n$  重零点, 故得证。

14, 证明：设  $f(z) = -z, g(z) = \varphi(z)$ ,

则在  $C$  上,  $|g(z)| = |\varphi(z)| < 1 = |-z| = |f(z)|$

由儒歇定理,  $f(z)$  与  $f(z) + g(z) = \varphi(z) - z$  在  $C$  内零点个数相同,

而  $f(z) = -z$  在  $C$  内只有一个零点, 所以  $f(z) + g(z) = \varphi(z) - z$  在  $C$  内有

只有一个零点, 记为  $z_0$ , 使得  $\varphi(z_0) - z_0 = C$  或  $\varphi(z_0) = z_0$

## 第七章 共形映射

### (一)

1. 解: 由  $f(z) = z^2$  得  $f'(z) = 2z$ ,  $f'(i) = 2i$ , 故  $w = z^2$  在  $z = i$  处的伸缩率为

$$|f'(i)| = 2, \text{ 旋转角为 } \arg f'(i) = \frac{\pi}{2},$$

又  $f(i) = -1$ , 由几何意义可知, 过  $z = i$  且平行于实轴正向的曲线的切线方向经过映射  $w = z^2$  后变为过  $w = -1$  且平行于虚轴正向的曲线的切线方向。

2. 证明: 假设  $f(z)$  在  $D$  内不恒为常数, 由保域定理知  $f(D)$  为一区域, 这与

$|f(z)|$  在  $D$  为常数矛盾,

同样假设  $f(z)$  在  $D$  内不恒为常数, 由保域定理知  $f(D)$  为一区域, 这与  $\operatorname{Re} f(z)$  或  $\operatorname{Im} f(z)$  在  $D$  为常数矛盾。

3. 解: (1) 因映射  $w = iz = ze^{\frac{\pi}{2}i}$  为一旋转变换, 所以它将以  $z_1 = -i, z_2 = -1, z_3 = 1$  为顶点的三角形映射为以  $w_1 = -1, w_2 = -i, w_3 = i$  为顶点的三角形。

(2) 将闭圆域  $|z-1| \leq 1$  映射为闭圆域  $|w-i| \leq 1$ 。

4. 解: (1) 依题意, 得

$$\begin{aligned} \frac{w-1}{w} : \frac{-1-1}{-1} &= \frac{z-1}{z-i} : \frac{-i-1}{-i-i} \\ 1 - \frac{1}{w} &= \frac{z-1}{z-i} \cdot \frac{4i}{i+1} \Leftrightarrow -1 \\ \frac{1}{w} &= 1 - \frac{4i(z-1)}{(i+1)(z-i)} = \frac{(1-3i)z + (1+3i)}{(i+1)(z-i)} \end{aligned}$$

$$\text{故 } w = \frac{(i+1)(z-i)}{(1-3i)z + (1+3i)}.$$

(2) 因  $1 \Leftrightarrow \infty, -1 \Leftrightarrow 0$ , 故可设线性变换  $w = k \frac{z+1}{z-1}$

$$(0, \infty, \operatorname{Re}^{ia}, w) = (i, -i, 0, z)$$

$$w = \frac{1+g}{1-g}$$

$$w = -\frac{z-2i}{z+2i} w = e^g$$

$$\eta = z^4$$

$$w_1 = \sqrt{z}$$

又因  $i \Leftrightarrow -1$

$$w_2 = -\frac{w_1+1}{w_1-1}$$

$$w_3 = w_2^2$$

$$w = \frac{z+1+2i\sqrt{z}}{i(z+1)+2\sqrt{z}}$$

$$\text{故 } -1 = k \frac{i+1}{i-1} \Rightarrow k = -i$$

$$\text{故 } w = \frac{i(z+1)}{1-z}。$$

(3) 因  $0 \Leftrightarrow \infty, \infty \Leftrightarrow 0$ ，故可设线性变换  $w = k \frac{1}{z}$ ，

$$\text{又 } i \Leftrightarrow i$$

$$\text{故 } i = k \cdot \frac{1}{i} \Rightarrow k = -1，$$

$$\text{故 } w = -\frac{1}{z}。$$

6.解：为使分式函数  $w = \frac{ai+b}{cz+d}$  不为常数，应有  $ad-bc \neq 0$

其次，若使  $S_z$  上的圆周  $|z|=1$  变成  $S_w$  上的圆周通过无穷远点  $\infty$ ，因而在  $S_z$  上对

应点必过点  $-\frac{d}{c}$ ，且  $|z|=1$ ，

所以  $ad-bc \neq 0$ ， $|c|=|d|$  是系数应满足的条件。

7.解：(1) 根据线性变换的保对称点性知  $i$  关于实轴的对称点  $-i$  应该变到  $w=0$

关于单位圆周的对称点  $w=\infty$ ，故可设  $w = k \frac{z-i}{z+i}$ ，

$$\text{又由 } L(i) = k \frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2} \Big|_{z=i} = k \cdot \frac{2i}{(z+i)^2} \Big|_{z=i} = k \frac{i}{-2} > 0$$

因此，所求的线性变换为  $w = L(z) = \frac{iz+1}{z+i}$

(2) 设  $k = e^{i\theta}$ , 则  $L'(i) = e^{-i\theta} \cdot \frac{i}{2}$

故由  $\theta + \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2}, \theta = -\pi$  得

$$w = -\frac{z-i}{z+i}$$

8. 解: (1) 设  $w = k \frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$ , 再由  $L(1) = -1$  得  $k = 2$

于是所求的线性变换为  $w = \frac{2z+1}{z-2}$

(2) 设  $k = e^{i\theta}$ , 有

$$L'(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = e^{i\theta} \cdot \frac{2z-1}{z-2} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{4}{9} e^{i(\theta+\pi)}$$

故  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , 所以

$$w = i \cdot \frac{2z-1}{z-2}.$$

10. 解: 由线性变换的保对称点性及保交比性有

$$(0\infty, \infty, \alpha, \beta) = (i, -i, z, \bar{z})$$

由此可得所求线性变换为  $w = 2i \frac{z-i}{z+i}$

因需要  $L'(i) = 1$ , 所以

$$\theta = -\frac{3}{2}\pi, R = 2.$$

11. 解: 已知  $z = a \leftrightarrow w = 0$ , 则由线性变换的保对称性,

$$z = \rho \leftrightarrow w = Re^{ia}$$

由此三对对应点即可决定  $w = L(z)$ 。

12. 解: (1) 应用条件, 结合图形, 即可得

$$\frac{z}{2} = e^{i\theta} \frac{w-1}{w+1}$$

(2) 应用条件, 结合图形, 即可得保形变换为

$$w = -\frac{z-2i}{z+2i}$$

13.解：(1) 结合图形，作变换 1)  $\xi = \frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}$

$$2) \quad \eta = e^{\pi i} \xi$$

$$3) \quad w = \eta^3$$

故所求的线性变换为  $w = -\left(\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\right)^3$

(2) 结合图形，作变换 1)  $\xi = -\frac{z+1}{z-1}$

$$2) \quad \eta = \xi^2$$

$$3) \quad w = -i\eta$$

(3) 结合图形，作变换 1)  $\xi = -\frac{4}{z-2}$

$$2) \quad \eta = -i\xi$$

$$3) \quad g = \frac{\pi}{2}\eta \quad 4) \quad w = e^g$$

14.解：作如下变换 1)  $\eta = z^4$

$$2) \quad w = \frac{\eta-i}{\eta+i}$$

故所求的线性变换为  $w = \frac{z^4-i}{z^4+i}$

15.解：作如下变换 1)  $\xi = -\frac{z+1}{z-1}$

$$2) \quad g = \xi^2$$

$$3) \quad w = \frac{1+g}{1-g}$$

故所求的线性变换为  $w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

16.解：作如下变换 1)  $\xi = z^2$

$$2) \quad w = k \frac{\xi+2}{\xi}$$

故所求的线性变换为  $w = -\frac{z^2+2}{3z^2}$

17.解：作如下变换 1)  $\eta = -\frac{z-(1+i)}{z-(2+2i)}$

$$2) w = \sqrt{\eta}$$

故所求的线性变换为  $w = \sqrt{\frac{(1+i)-z}{z-(2+2i)}}$

18.解：作如下变换 1)  $\zeta = \sqrt{z}$

$$2) g = -\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

$$3) w = g^2$$

故所求的线性变换为  $w = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$

19.解：作如下变换：1)  $w_1 = \sqrt{z}$

$$2) w_2 = -\frac{w_1+1}{w_1-1}$$

$$3) w_3 = w_2^2$$

$$4) w = \frac{w_3-i}{w_3+i}$$

故所求的线性变换为  $w = \frac{z+1+2i\sqrt{z}}{i(z+1)+2\sqrt{z}}$

## (二)

1.证明：不妨假设  $f(0)=0$ ，否则，代替  $f(z)$  总可以考虑

$$F(z) = f(z) - f(0)$$

而  $F(0)=0, F'(0)=f'(0) \neq 0$

接着可以应用俞歇定理。

2.证明：由于  $f(z)=u+iv$  在区域单叶解析，根据数学分析中的面积公式知

$$\iint_{(G)} du dv = \iint_{(D)} \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} dx dy = \iint_{(D)} (u_x v_y - v_x u_y) dx dy$$

根据  $C-R$  条件知  $u_x v_y - v_x u_y = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2$

$$\text{故 } A = \iint_{(D)} |f'(z)|^2 dx dy$$

3.证明：圆周  $|z|=C$  的参数方程为

$$z = ce^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

在映射  $w = z + \frac{1}{z}$  之下像曲线的参数方程为

$$w = ce^{i\theta} + \frac{1}{ce^{i\theta}}$$

即像曲线为椭圆

$$u = (c + \frac{1}{c}) \cos \theta, v = (c - \frac{1}{c}) \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

4.解：变成  $w$  平面上的区域

$$\operatorname{Re} w > 0, \left| w - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}, \operatorname{Im} w > 0$$

5.解：因  $1 \rightarrow \infty$ ，则可设  $w = \frac{az+b}{z-1}$

故  $c=1, d=-1$ ，又因  $i$  为  $w=L(z)$  之二重不动点，由教材中例 7.4 知：当

$\Delta = (a-d)^2 + 4bc = i$  时，有一个二重不动点  $z = \frac{a-d}{2c}$ ，故知

$$a = -1 + 2i, b = 1$$

故所求线性变换为

$$w = L(z) = \frac{(2-i)z+1}{z-1} \quad f(z) = w = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

6.证明：设  $w=L(z)$  为所求线性变换，除题设外还可设  $w_0 = L(z_0)$ ，必然有

$$w_0 \neq z_0, z_0 \neq p, z_0 \neq q, w_0 \neq p, w_0 \neq q$$

除非  $w=L(z)$  为恒等变换，再由三对对应点唯一确定一个线性变换，就可得证。

8. 证明：考虑线性变换  $w = \frac{z-p}{z-q}$

由于线性变换的保圆性，圆周  $|w| = k$  的原像  $\left| \frac{z-p}{z-q} \right| = k$  是扩充  $z$  平面上的圆周方程，但当  $k \neq 1$  时， $z = \infty$  不满足方程，这时此方程就表示有限平面上的通常圆周。

因为题中线性变换分别把  $p \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$ ，而  $w$  平面上  $0$  和  $\infty$  关于圆周  $|w| = k$  对称，所以由线性变换的保对称性知： $0$  和  $\infty$  的原像  $p$  和  $q$  关于  $|w| = k$  的原像

$$\left| \frac{z-p}{z-q} \right| = k \text{ 对称.}$$

当  $k = 1$  时， $\left| \frac{z-p}{z-q} \right| = k > 0$  表示的扩充  $z$  平面上的圆周就退化为以  $p, q$  为对称点的直线。

9. 证明：必要性：若分式线性映射  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  使  $S_z$  上的由三圆弧所围成的三角形  $ABC$  与  $S_w$  上的直线三角形  $A'B'C'$  相对应时，必有  $S_w$  上的三直线通过  $w = \infty$  点，即三直线交于  $w = \infty$  点，因而对应的  $S_z$  上的三圆弧必交于一点  $z = -\frac{d}{c}$ ，证明了必要性。

充分性：如果当  $S_z$  上的某三圆弧交于一点  $z = -\frac{d}{c}$  时，则三圆周在分式线性函数  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  映射下，其像必过  $w = \infty$  点的三直线，因而曲线三角形  $ABC$  被映射成直线三角形  $A'B'C'$ ，即  $S_z$  上的某三圆弧交于一点  $z = -\frac{d}{c}$  也是三角形  $ABC$  映射成三角形  $A'B'C'$  的充分条件。

11. 证明：由施瓦茨引理  $|f(z)| \leq |z| < 1$ , (1)

$$|z| = |f^{-1}(w)| \leq |w| < 1 \quad (2)$$

由 (1)(2) 得到

$$|f(z)| = |z| \quad f(z) \Rightarrow e^{i\theta} z \quad (3)$$

再由条件  $\arg f'(0) = 0$ , 知  $\theta = 0$ , 即  $f(z) = z$ .

12. 证明: 设  $f(0) = w_0$ ,  $|w_0| < 1$ , 则由教材中例 7.8, 必有一线性变换  $\eta = L(w)$ ,

它将  $|w| < 1$  保形变换成  $|\eta| < 1$ , 且  $L(w_0) = 0$ , 即  $\eta = e^{i\theta} \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w}$ , 于是单叶解析

函数  $\eta = L(w) = \eta(f(z))$  就将  $|z| < 1$  保形变换成  $|\eta| < 1$ , 且  $L(f(0)) = 0$ , 故由 11

题的 (3) 式有  $L(f(z)) = e^{i\theta} z$ , 由于线性变换的逆变换仍是线性变换, 所以

$w = f(z)$  必是  $z$  的线性函数, 即

$$f(z) = \frac{-de^{i\theta}z + b}{ce^{i\theta}z - a}.$$

13. 证明:  $w = \varphi(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$  在  $|z| < 1$  内解析, 把  $|z| < 1$  映成为  $|w| < 1$ , 且  $\varphi(a) = 0$ ,

它的反函数  $z = \varphi^{-1}(w)$  在  $|w| < 1$  内解析, 把  $|w| < 1$  映为  $|z| < 1$ , 且  $\varphi^{-1}(0) = a$ . 于是

复合函数  $F(w) = f[\varphi^{-1}(w)]$  在  $|w| < 1$  内解析,  $|F(0)| = f[\varphi^{-1}(0)] = 0$ , 当  $|w| < 1$  时,

$|F(w)| = |f[\varphi^{-1}(w)]| = |f(z)| < 1$ , 由施瓦茨引理,  $|F(w)| \leq |w|$ , 即

$$|f(z)| \leq \frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|}.$$

14. 证明: 同第 13 题证明. 当  $|F(w)| \leq |w|$  取符号时, 即  $|F(w)| = |w|$ , 由施瓦茨引

理的另一结论, 有  $F(w) = e^{i\theta} w$ . 将

$w = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$  与  $F(w) = f[\varphi^{-1}(w)]$  代入  $F(w) = e^{i\theta} w$  得到

$$f(z) = w = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

