

一、第七章空间解析几何与向量代数

• 平面与直线的关系

1. 讨论曲面 $F(nx-lz, ny-mz)=0$ 上任何一点处的切平面与直线 $\frac{x-1}{l} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{n}$ 之间的关系，其中 $F(u,v)$ 为可微函数

解析：找出切平面的法向量与所给直线的方向向量之间的关系

解： $F_x = F_1 n = n F_1$

$F_y = F_2 n = n F_2$

$F_z = F_1(-l) + F_2(-m) = -l F_1 - m F_2$

所以曲线上任一点切平面的法向量 $\vec{n}_1(n F_1, n F_2, -l F_1 - m F_2)$

直线方向向量 $\vec{n}_2 = (l, m, n)$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = n l F_1 + m n F_2 - n l F_1 - n m F_2 = 0$

所以 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

所以两者关系为平行

• 异面直线之间距离问题

1. 已知两条异面直线 $L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ 和 $L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$. 记 L_1 上的点 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 方向向量 $\vec{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$; L_2 上的点 $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 方向向量 $\vec{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ 证明这两条直线之间的距离为 $d = \frac{|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$

解析：和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线，公垂线与两条直线相交的点所形成的线段，叫做这两条异面直线的公垂线段。两条异面直线的公垂线段的长度，叫做这两条异面直线的距离。而两异面直线之间的距离可转换为线面距离。

解：过 L_2 上任意一点作直线 L_3 平行于 L_1 ，设 L_2 与 L_3 构成平面为平面 A，则两异面直线的距离 d 等于 L_1 到平面 A 的距离 d_1

平面 A 的法向量为 $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

L_1 到平面 A 距离 $d_1 = \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$

即 L_1 到 L_2 距离 $d = d_1 = \frac{|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$

得证

二、第八章多元函数微分法及其应用

• 求偏导

1. 求函数 $Z = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$ 的偏导数 $Z_x(0,1), Z_y(0,1)$

解:

方法一: 先把某一变量值固定, 再对另一个变量求导数

$$Z(x, 1) = \frac{x}{(x^2+1)^{1/2}}$$

$$Z_x(x, 1) = \frac{(x^2+1)^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2+1)^{1/2}} x}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$\text{所以 } Z_x(0, 1) = 1$$

$$\text{又 } Z(0, y) = 0$$

$$\text{所以 } Z_y(0, y) = 0$$

方法二: 整体求偏导数, 再代值

$$Z_x(x, y) = \frac{(x^2+y^2)^{1/2} - x \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$Z_x(0, 1) = 1$$

$$Z_y(x, y) = \frac{-x \cdot 2y \cdot \frac{1}{2}}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -xy(x^2+y^2)^{-3/2}$$

$$Z_y(0, 1) = 0$$

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x})=0$ 确定, 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$$

分析: 多元函数的复合求导法则与隐函数的求导公式综合

$$\text{解: } F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}) = 0$$

$$F_x = F_1 \frac{\partial(x+\frac{z}{y})}{\partial x} + F_2 \frac{\partial(y+\frac{z}{x})}{\partial x} = F_1 - \frac{z}{x^2} F_2$$

$$F_y = F_1 \frac{\partial(x+\frac{z}{y})}{\partial y} + F_2 \frac{\partial(y+\frac{z}{x})}{\partial y} = F_2 - \frac{z}{y^2} F_1$$

$$F_z = F_1 \frac{\partial(x+\frac{z}{y})}{\partial z} + F_2 \frac{\partial(y+\frac{z}{x})}{\partial z} = F_1 \frac{1}{y} + F_2 \frac{1}{x}$$

$$\text{则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_x}{F_z} = \frac{\frac{y}{x} F_2 - xy F_1}{x F_1 + y F_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_y}{F_z} = \frac{\frac{x}{y} F_1 - xy F_2}{x F_1 + y F_2}$$

$$\text{则 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x F_1 + y F_2)(z - xy)}{x F_1 + y F_2} = z - xy$$

故得证

3. 求下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

$$(1) \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}, \text{求} \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}; (2) \begin{cases} x+y+z+u+v=1 \\ x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=1 \end{cases}, \text{求} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$$

解析: 隐函数求导; 包含自由未知数个数=未知数个数-方程个数

解: (1) 自由未知数个数=3-2=1 个 (由题意知为 z)

$$\text{则有} \begin{cases} x=x(z) \\ y=y(z) \end{cases}, \text{原方程组两端同时对 } z \text{ 求导, 得: } \begin{cases} x'+y'=-1 \\ 2xx'+2yy'=-2z \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x'+y'=-1 \\ xx'+yy'=-z \end{cases}$$

$$\text{解得: } x' = \frac{dx}{dz} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -z & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}} = \frac{z-y}{y-x}, \quad y' = \frac{dy}{dz} = \frac{x-z}{y-x}$$

(2) 自由未知数个数=5-2=3 个 (由题意知为 x, y, z)

有 $u=u(x, y, z), v=v(x, y, z), x=x, y=y, z=z$

原方程两端同时对 x 求偏导

$$\text{得: } \begin{cases} u_x + v_x = -1 \\ uu_x + vv_x = -x \end{cases} \Rightarrow u_x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -x & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ u & v \end{vmatrix}} = \frac{x-v}{v-u}$$

$$\text{同理得: } v_x = \frac{u-x}{v-u}$$

4. 设 $u=f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数, 函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定:

$$e^{xy} - xy = 2, e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt, \text{求} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{解: 两个隐函数均对 } x \text{ 求导: } ye^{xy} + x \frac{dy}{dx} e^{xy} - y - x \frac{dy}{dx} = 0; e^x = \frac{\sin(x-z)}{x-z} \cdot (1-z')$$

$$\text{解得: } \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-e^{xy})}{x(e^{xy}-1)}, \quad \frac{dz}{dx} = 1 - e^x \cdot \frac{x-z}{\sin(x-z)}$$

$$\text{则: } \frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + f_2 \frac{y(1-e^{xy})}{x(e^{xy}-1)} + f_3 \left[1 - e^x \cdot \frac{x-z}{\sin(x-z)} \right]$$

5. 设函数 $z=f(u)$, 方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$ 确定 u 是 x, y 的函数, 其中 $f(u), \varphi(u)$ 可微;

$$p(t), \varphi'(u) \text{ 连续, 且 } \varphi'(t) \neq 1, \text{求 } p(y) \frac{\partial z}{\partial x} + p(x) \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\text{解: 由 } z=f(u) \text{ 得: } \frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y}$$

在方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$ 两边分别对 x, y 求偏导,

$$\text{得: } \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + p(x); \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial y} - p(y)$$

$$\text{解得: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{p(x)}{1-\varphi'(u)}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}$$

代入可得: $p(y)\frac{\partial z}{\partial x} + p(x)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f'(u)p(x)p(y)}{1-\varphi'(u)} - \frac{f'(u)p(x)p(y)}{1-\varphi'(u)} = 0$

• 求微分

1. 设 $f(x,y,z) = \frac{xcosx+ycosz+zcossx}{1+cosx+cosy+cosz}$, 求 $df|_{(0,0,0)}$

解析: 先代后求简便运算

解: 因为 $f(x,0,0) = \frac{x}{3+cosx}$, 所以 $f_x(x,0,0) = \frac{3+cosx+xsinx}{(3+cosx)^2}$, 得 $f_x(0,0,0) = \frac{1}{4}$;

由轮换对称性可知: $f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = \frac{1}{4}$

所以 $df|_{(0,0,0)} = f_x(0,0,0)dx + f_y(0,0,0)dy + f_z(0,0,0)dz = \frac{1}{4}(dx+dy+dz)$

2. 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)-2x+y-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, 求 $dz|_{(0,0)}$

解析: 方法一: 根据全微分定义 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$,

而全微分定义中 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+x,0+y)-f(0,0)-\frac{\partial z}{\partial x}x-\frac{\partial z}{\partial y}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

反推有 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$, 且 $f(0,0)=1$

所以 $dz|_{(0,0)} = 2dx - dy$

方法二: 因为 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)-2x+y-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, 分母趋于零, 极限存在, 则分子也趋于零

所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) - 2x + y - 1 = 0$

由连续性可知: $f(x,y) = 2x - y + 1$,

所以 $dz|_{(0,0)} = 2dx - dy$

• 多元函数极限

1. 证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+2y}{x^2-y}$ 不存在

分析: 要证明二重极限不存在

只需证明函数从不同方向趋近该点时, 极限值不同。

证明: 令点 (x,y) 沿 $y=kx$ 趋近 $(0,0)$

则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+2y}{x^2-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2kx}{x^2-kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2k}{x-k}$

显然, k 不等于 0 时, 极限值为 $-\frac{1+2k}{k}$, $k=0$ 时极限为无穷大

即 k 取不同值时极限值不同, 故极限不存在。

2. 判断下列函数的极限值是否存在, 如存在, 计算其极限值; 如不存在, 给出证明: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{(1/2)}}$

分析: 当函数沿不同路径趋近 $(0,0)$ 时, 极限值存在且相同, 则函数在该点极限值存在。

解: 对于 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{(1/2)}}$

令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $r \rightarrow 0$

所以原式 $= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin\theta \cos\theta = 0$

3. 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

解析: 运用定义或者夹逼准则

证明 因为 $|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},$

所以 $0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0.$

因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

证明 因为 $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, 故 $|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = 2\varepsilon$, 当 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 时恒有

$$|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon,$$

所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

• 可求偏导、可微、连续性判断

1. 设 $f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续性, 偏导的存在性以及可微性。

分析: 连续性可通过函数趋近该点时的极限值是否等于该点函数值判断, 偏导存在性可通过偏导定义讨论, 可微性通过定理或定义证明。

解: 令 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$

$$\text{则 } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sin 2\theta \frac{\ln \rho}{\rho^{-2}} = \sin 2\theta \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{-2\rho^{-1}} = 0 = f(0, 0)$$

所以函数在该点连续。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

则在该点处, 对 x 的偏导数存在, 同理, 对 y 的偏导数也存在

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\rho} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - A\Delta x - B\Delta y}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^{1/2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin 2\theta \rho^2 \ln \rho^2}{\rho} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \sin 2\theta \rho \ln \rho = \sin 2\theta \lim_{\rho \rightarrow 0} -\rho = 0 \end{aligned}$$

则在原点处可微

2. 讨论函数在 $(0, 0)$ 处的连续性。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(a + x^2 y^2)^{1/2} - 1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

分析: 讨论函数在该点是否连续, 即看函数趋向该点时的极限值是否等于函数在该点的取值。

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(a + x^2 y^2)^{1/2} - 1}{x^2 + y^2} = \frac{a^{1/2} - 1}{0}$$

$$\text{当 } a^{\frac{1}{2}} - 1 \neq 0 \text{ 时, } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \infty$$

$$\text{当 } a^{\frac{1}{2}} - 1 = 0 \text{ 时, } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(1 + x^2 y^2)^{1/2} - 1}{x^2 + y^2}$$

$$\text{其中 } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(1 + x^2 y^2)^{1/2} - 1}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{1}{2} x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2 + y^2} y^2$$

又 $0 < \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2 + y^2} < \frac{1}{2}$, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $y \rightarrow 0$, 有界值与无穷小的乘积为无穷小, 则 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(1 + x^2 y^2)^{1/2} - 1}{x^2 + y^2} = 0$

综上, $a=1$ 时, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(a + x^2 y^2)^{1/2} - 1}{x^2 + y^2} = 0$, 函数在该点连续;

$a \neq 1$ 时, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(a+x^2+y^2)^{1/2}-1}{x^2+y^2} = \infty$, 函数在该点不连续。

3. 证明 $z = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处可微但其偏导数不连续。

$$\text{因为 } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\rho} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{1/2}} = 0$$

所以函数在该点可微。

$$\text{在 } (0,0) \text{ 处, } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\text{又 } z(x, 0) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$$

$$\text{所以 } z_x(x, 0) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - 2 \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

在 $(0,0)$ 处已求得 $z_x(0,0) = 0$, 又对该函数, $(0,0)$ 处极限值不存在

故对 x 的偏导数不连续。

同理, 对 y 的偏导数不连续。

得证。

• 求方向导数

1. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数。

分析: 先求出该点在外法线方向的方向余弦, 再对 u 分别求偏导后求方向导数。

解: 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, 则 $F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z$, 于是球面在 (x_0, y_0, z_0) 处的外法线方向向量可取为 $\vec{l} = (F_x, F_y, F_z)|_{(x_0, y_0, z_0)} = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$,

$$\vec{l} \text{ 的方向余弦为 } \cos\alpha = \frac{x_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{1/2}}, \cos\beta = \frac{y_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{1/2}}, \cos\gamma = \frac{z_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{1/2}}$$

$$\text{又 } \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

$$\text{故 } \frac{\partial u}{\partial l}|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right)|_{(x_0, y_0, z_0)} = x_0 + y_0 + z_0$$

• 求极值

1. 求函数 $f(x, y) = (y + \frac{1}{3}x^3) \cdot e^{x+y}$ 的极值

解析：先找出函数驻点，再利用极值存在的充分条件对驻点进行检验（不可导点也有可能为极值点）

解：解方程组 $\begin{cases} f'_x(x, y) = (x^2 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y} = 0 \\ f'_y(x, y) = (1 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y} = 0 \end{cases}$ ，可得驻点为 $(-1, -\frac{2}{3})$ 、 $(1, \frac{4}{3})$

又因为 $f''_{xx}(x, y) = (2x + 2x^2 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ ， $f''_{xy}(x, y) = (1 + x^2 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ ， $f''_{yy}(x, y) = (2 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$

对驻点 $(-1, -\frac{2}{3})$ ，得 $A = -e^{-\frac{5}{3}}$ ， $B = e^{-\frac{5}{3}}$ ， $C = e^{-\frac{5}{3}}$ ，

所以 $AC - B^2 < 0$ ，故 $f(-1, -\frac{2}{3})$ 不是极值；

对驻点 $(1, \frac{4}{3})$ ，得 $A = 3e^{-\frac{1}{3}}$ ， $B = e^{-\frac{1}{3}}$ ， $C = e^{-\frac{1}{3}}$

所以 $AC - B^2 > 0$ ，且 $A > 0$ ，故 $f(1, \frac{4}{3}) = -e^{-\frac{1}{3}}$ 是极小值，该函数无极大值

• 拉格朗日乘数法

1. 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 所截得椭圆的面积

分析：椭圆面积为 $s = \pi ab$ ，可构造拉格朗日函数求出椭圆中心到椭圆上任意一点距离的最大值和最小值，即长半轴长度和短半轴长度，从而求出椭圆面积。

解：由 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ 可得曲线在 Oxy 平面上的投影方程为 $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$

因为投影过程中各点x,y轴坐标不变,则椭圆中心x,y轴坐标为投影圆圆心坐标

即椭圆中心为点 $M_0(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2)$, 设椭圆上的点到 M_0 的距离为d

所以目标函数为 $d^2 = (x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 + (z-2)^2$, 在 $z = x^2 + y^2, x+y+z = 1$ 的条件下, 求其最大值和最小值。

设 $F(x, y, z) = (x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 + (z-2)^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x+y+z-1)$

$$\text{当} \begin{cases} F_x = 2(x + \frac{1}{2}) - 2\lambda x + \mu = 0 \\ F_y = 2(y + \frac{1}{2}) - 2\lambda y + \mu = 0 \\ F_z = 2(z - 2) + \lambda + \mu \\ z - x^2 - y^2 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{可得, 当} \lambda = -\mu = 1 \text{时, } z=2$$

所以 $M_1(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2) M_2(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2)$

当 $\lambda \neq 1$ 时, $x=y$

$M_3(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2 - \sqrt{3}) M_4(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2 + \sqrt{3})$

所以长短半轴为 $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{6}}{2}$

所以 $S = \pi ab = \pi \frac{3\sqrt{2}}{2}$

2. 平面直角坐标系内, 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上引一条距原点最远的法线。

解析: 椭圆方程可以看作是条件, 因而法线与原点的最大距离就是二元函数的条件极值。故先根据隐函数求导法则求出法线方程, 代入点到直线距离公式, 作拉格朗日函数求解。

解: 方程两边对 x 求导: $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$,

显然取得最大值的法线不可能是过四个顶点的法线, 因此 xy 均非零

得 $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$, 则法线斜率 $k = -\frac{1}{y'} = \frac{a^2y}{b^2x}$

设椭圆上一点 (x_0, y_0) , 且 $x_0 \cdot y_0 \neq 0$

则过该点的法线方程: $y - y_0 = y'(x - x_0)$, 即 $\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x - y + y_0 - \frac{a^2y_0}{b^2} = 0$

代入点到直线距离公式: $d^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 x_0^2 y_0^2}{a^2 \frac{a^2 y_0^2}{b^2} + b^2 \frac{x_0^2}{a^2}}$

令 $u = \frac{x^2}{a^2}, v = \frac{y^2}{b^2}$, $f(u, v, \lambda) = \frac{(a^2 - b^2)^2 uv}{a^2 v + b^2 u} + \lambda(u + v - 1)$, ($u > 0, v > 0$)

$$\text{令} \begin{cases} f_u = \frac{(a^2 - b^2)^2 a^2 v^2}{(a^2 v + b^2 u)^2} + \lambda = 0 \\ f_v = \frac{(a^2 - b^2)^2 b^2 u^2}{(a^2 v + b^2 u)^2} + \lambda = 0 \\ f_\lambda = u + v - 1 = 0 \end{cases}$$

易知 $u = \frac{a}{a+b}, v = \frac{b}{a+b}$, 则 $\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{a}{a+b}, \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{b}{a+b}$

由实际问题, f 一定有最大值

依据对称性, 距离原点最远的法线有四条:

$$y - \sqrt{\frac{b^3}{a+b}} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}} \left(x \mp \sqrt{\frac{a^3}{a+b}} \right) \text{ 或 } y + \sqrt{\frac{b^3}{a+b}} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}} \left(x \pm \sqrt{\frac{a^3}{a+b}} \right)$$

注: 解析几何中的最值问题很多都能用多元函数求极值的方法 (或借助参数方程转化为一元函数)。由于二维曲线或空间的曲面 (或曲线) 上的点总满足方程 (或方程组), 因而可以转化为条件极值问题。当函数式较复杂时, 可以作适当的变量代换。

• 运用罗尔定理证明问题

1. 设二元函数 $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数, 且 $f(0,1)=f(1,0)$. 证明: 在单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上至少存在两个不同的点满足方程 $y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$

解析: 问题要求证明存在性, 那么可以考虑使用中值定理解决, 因而需要利用参数方程化二元函数为一元函数。

证明: 由圆的参数方程: $x=\cos \theta, y=\sin \theta$, 再令关于 θ 的一元函数 $F(\theta)=f(x,y)=f(\cos \theta, \sin \theta)$ 其中 $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\text{此时 } F'(\theta) = -\sin \theta f_1 + \cos \theta f_2 = x f_2 - y f_1$$

$$\text{因为 } f(0,1)=f(1,0)$$

$$\therefore F(0)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(2\pi)$$

$\therefore$ 由罗尔定理, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 和 $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ 上分别至少存在实数 ξ_1, ξ_2 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 即 $x f_2 = y f_1$

(总结: 证明存在性问题时, 经常会使用中值定理来解决, 通常需要根据条件构造一元的辅助函数或设定一个主变量。)

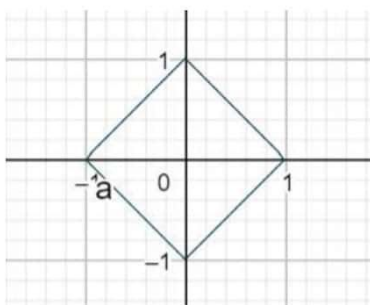
三、第九章重积分

• 利用直角坐标计算二重积分

1. 计算二重积分 $I = \iint_D (|x| + |y|) dx dy$, 其中 $D: |x| + |y| \leq 1$

解析: 利用对称性可以简便运算过程

解:



如图所示, D 关于 x 轴和 y 轴均对称, 且被积函数关于 x, y 为偶函数, 即 $f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)=f(-x,-y)$

$$\text{则: } I = \iint_D (|x| + |y|) dx dy = 4 \iint_{D_1} (|x| + |y|) dx dy \quad (D_1 \text{ 为 } D \text{ 在第一象限所构成的区域})$$

$$\text{由对称性可知: } \iint_{D_1} |x| dx dy = \iint_{D_1} |y| dx dy$$

$$\text{则 } I = 4 \iint_{D_1} (|x| + |y|) dx dy = 4 \iint_{D_1} (|x| + |x|) dx dy = 8 \iint_{D_1} |x| dx dy = \frac{4}{3}$$

2. 计算 $\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$, 其中 D 由 $y=x^3, y=1, x=-1$ 围成, f 为连续函数

解析: 灵活运用被积函数的奇偶性

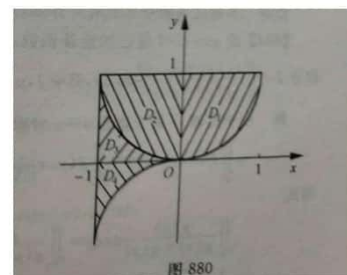
$$\text{解: } \iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy = \iint_{D_1+D_2} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$$

$$+ \iint_{D_3+D_4} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$$

由于被积函数是 x 的奇函数, 故有 $\iint_{D_1+D_2} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy=0$

$$\text{因 为 } \iint_{D_3+D_4} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy = \iint_{D_3+D_4} x d\sigma + \iint_{D_3+D_4} xyf(x^2+y^2)d\sigma =$$

$$\int_{-1}^0 x dx \int_{x^3}^1 dy = -\frac{2}{5}$$



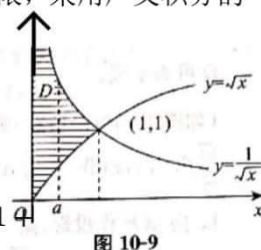
3. 计算二重积分 $\iint_D xy e^x dxdy$, 其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域

解析: **D 为无界区域**时, 在将二重积分化为两次积分时, 应当注意上下限, 采用广义积分的方法进行计算

$$\text{解: } \iint_D xy e^x dxdy = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 xe^x dx \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} y dy = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 xe^x \frac{1}{2} y^2 \Big|_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 (1-x^2)e^x dx = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[(1-x^2)e^x \Big|_a^1 + 2 \int_a^1 xe^x dx \right] = \frac{1}{2} (-1 + 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 xe^x dx)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-1 + 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} (x-1)e^x \Big|_a^1 \right] = \frac{1}{2}$$



4. 求 $\iint_D \max(xy, 1) dxdy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

解析: 根据被积函数 **将区域 D 进行划分**, 利用二重积分对于积分区域的可加性求得最终结果

$$\text{解: } \iint_D \max(xy, 1) dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy = \frac{19}{4} + \ln 2$$

• 利用积分区域的轮换对称性 (即边界方程当 x, y 互换后方程不变)

1. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$

解析: 交换积分顺序后, x, y 互换

$$\text{解: } I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y) dx = \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y) dy$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x)f(y) dy =$$

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 f(y) dy = \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 = A^2 \Rightarrow I = \frac{A^2}{2}$$

• 利用极坐标计算二重积分

1. 设函数 $f(x,y)$ 在 $U(0,0)$ 内连续, $D: x^2 + y^2 \leq t^2$ 在 $U(0,0)$ 内,

且 $F(t) = \iint_D f(x,y) dx dy$, 证明: $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{t} = 2\pi f(0,0)$

解析: 由积分区域 D 为圆面积自然转换成极坐标系, 表示出 $F(t)$, 考查积分上限函数求导, 利用积分中值定理分离积分函数, 从而利用条件连续性

证明: $D: x^2 + y^2 \leq t^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq t \end{cases}$

转换成极坐标有 $F(t) = \int_0^t \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\theta$

故 $F'(t) = t \int_0^{2\pi} f(t \cos \theta, t \sin \theta) d\theta$

故 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t \int_0^{2\pi} f(t \cos \theta, t \sin \theta) d\theta}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{2\pi} f(t \cos \theta, t \sin \theta) d\theta \right)$

由积分中值定理可知: 上式 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t \cos \xi, t \sin \xi) \cdot 2\pi \quad (0 \leq \xi \leq 2\pi)$

因为函数 $f(x,y)$ 在 $U(0,0)$ 领域连续, 有 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t \cos \xi, t \sin \xi) = f(0,0)$

即 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{t} = 2\pi f(0,0)$

2. 设平面区域 $D = \{(x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x+y} dx dy$.

解析: 被积函数含有 $x^2 + y^2$, 积分区域 D 为环扇形域, 故利用极坐标系计算二重积分的值

解: 在极坐标系中 D 可表示为: $D = \{(\theta, r) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2\}$

所以 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x+y} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \frac{\cos \theta \sin(\pi r)}{\cos \theta + \sin \theta} \cdot r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \int_1^2 r \cdot \sin(\pi r) dr$

由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \frac{\pi}{4}$

且 $\int_1^2 r \cdot \sin(\pi r) dr = \frac{1}{\pi} \left[-r \cos(\pi r) + \frac{1}{\pi} \sin(\pi r) \right] \Big|_1^2 = -\frac{3}{\pi}$

所以 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x+y} dx dy = -\frac{3}{4}$

• 二重积分的应用

1. 求曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 和 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成的立体的体积

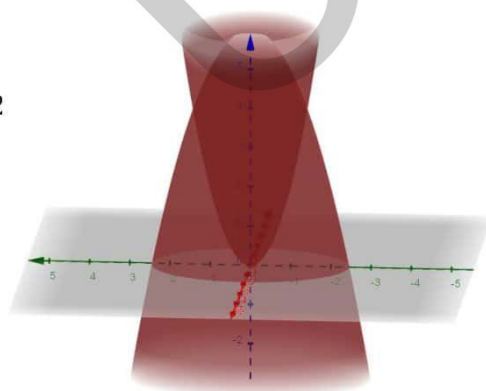
解析: 先求出两曲面的公共部分在某一平面 (一般为 xoy 平面) 的投影, 再利用二重积分的几何性质求出所求的体积

解: 两曲面如图所示

俩曲面交线所围区域 D 为 xOy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leq 2$

则 $V = \iint_D [6 - 2x^2 - y^2 - (x^2 + 2y^2)] dx dy$

$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (6 - 3x^2 - 3y^2) dy$



$$= 12 \int_0^{\sqrt{2} \frac{2}{3}} \cdot (2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{令 } x = \sqrt{2} \sin t, \text{ 则上式} = 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (1 - \sin^2 t) \, dt = 32 \cdot \frac{3\pi}{16} = 6\pi$$

• 分别利用反常积分与二重积分求积分值

1. 求 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 的值

$$\text{解: 方法一: } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \xrightarrow{x^2=t} \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(注: 此处运用了 Γ 函数的性质)

补充: Γ 函数的定义: $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$

Γ 函数性质 3: $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (0 < s < 1)$ —— 余元公式

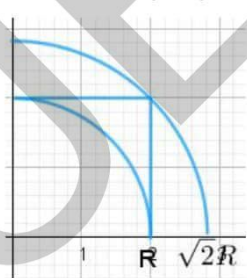
当 $s = \frac{1}{2}$ 时, 由余元公式可得: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

性质 4: 在 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ 中, 作代换 $x = u^2$, 有 $\Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2s-1} du$

再令 $2s-1 = t$ 或 $s = \frac{1+t}{2}$, 即有: $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^t du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right) \quad (t > -1)$

令 $s = \frac{1}{2}$, 则 $t=0$ 得 $2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

方法二: 令 $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$



$$D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}$$

$$D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\iint_{D_1} e^{-x^2 - y^2} dx dy \leq \iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy \leq \iint_{D_2} e^{-x^2 - y^2} dx dy$$

$$\text{因为 } \iint_{D_1} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2}\right) \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$$

$$\text{同理可知: } \iint_{D_2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

$$\iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2$$

$$\text{代入上式得: } \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

$$\text{令 } R \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2 \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\text{由夹逼准则可知: } \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$